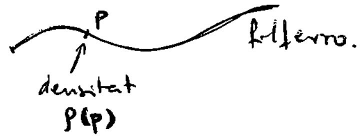
4. INTEGRACIÓ DE FUNCIONS SOBRE CORBES I SUPERFÍCIES.

- Ens proposem integrar funcions sobre corbes no necessàriament rectes, o sobre superfícies no necessàriament planes.

P. ex., per calcular la massa d'un filferro a partir de la funció densitat (en kg/m). Donada una parametrització del filferro (corba), la densitat vindrà donada per una funció d'1 variable (el paràmetre); però no n'hi ha prou tenint en compte aquesta funció, sinó també com està parametritzat el filferro.



Anàlogament en el cas d'una placa (superfície), en què la densitat (en kg/m²) vindrà donada per una funció de 2 variables.
Això ens porta a considerar integrals de trajectòria o de superfície.

Corbes parametritzades

- Definicions

(a) Trajectòria o camí:

una aplicació $\alpha: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1

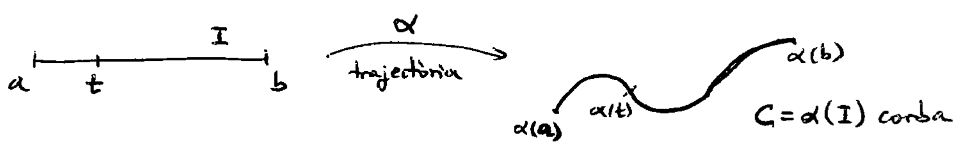
$$t \longmapsto \alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

Si $\alpha(a)=\alpha(b)$, direm que la trajectòria és tancada.

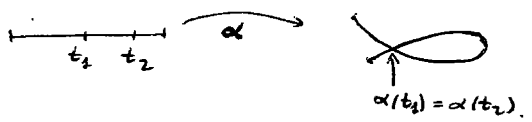
(b) Corba recorreguda per la trajectòria α:

$$C=\alpha(I)=\{\alpha(t) : t\in I\}$$, conjunt de punts per on passa la trajectòria α.

També podem dir que α és una parametrització de C, amb la variable t com a paràmetre (o temps).



Obs.: com que no demanem α injectiva, una corba pot tenir autointerseccions.



(c)
- Vector tangent en el punt $\alpha(t)$:

$$\alpha'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$$

- Velocitat de la trajectòria α en el punt $\alpha(t)$:

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$$

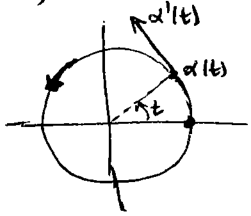
<u>Exemple</u>. $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

$\hookrightarrow$ recorre la circumferència $C = \{x^2+y^2=1\}$, amb velocitat 1.

vector tangent: $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$

velocitat: $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2} = 1$ (constant)



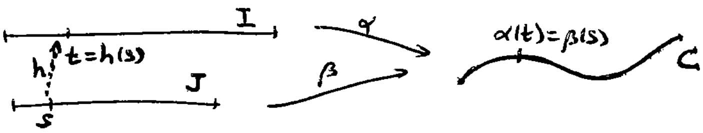
$\beta : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ és una altra trajectòria, que recorre la mateixa circumferència C amb velocitat 2, i ho fa 2 vegades.

- Com hem vist, una mateixa corba C admet diferents parametritzacions, corresponents a diferents maneres de recórrer C.

<u>Def</u>. Dues trajectòries $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ són <u>equivalents</u> si $\exists$ una aplicació $h : J \longrightarrow I$ bijectiva, amb h i h^{-1} de classe C^1, tal que $\beta = \alpha \circ h$.
(és a dir, $\beta(s) = \alpha(h(s)) \quad \forall s \in J$)

És obvi que dues trajectòries equivalents recorren la mateixa corba: $C = \alpha(I) = \beta(J)$.



Així, $\alpha(t)$, $t \in I$, i $\beta(s)$, $s \in J$, són parametritzacions diferents de la corba C, i $t = h(s)$ és <u>canvi de paràmetre</u>.

Pel teo. de la f. inversa (global), tota $h : J \longrightarrow I$ bijectiva, C^1, amb $h'(s) \neq 0 \ \forall s \in J$, ("jacobià") és un canvi de paràmetre.

Les dues parametritzacions $\alpha(t)$ i $\beta(s)$ poden recórrer la corba C en el <u>mateix sentit</u> (si $h'>0$) o en <u>sentit invers</u> (si $h'<0$).

Aplicant la regla de la cadena, podem trobar:
- relació entre els vectors tangents: $\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s)$ (són proporcionals)
- " " les velocitats: $\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)|$

• Veurem que les nocions de longitud i integral d'una funció, sobre una corba, no dependran de la parametrització escollida, però caldrà que la parametrització compleixi algunes condicions.

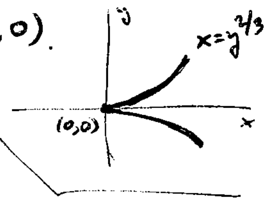
Def. $\alpha: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrització d'una corba C.

* α és parametrització simple si no té autointerseccions (si la corba no és tancada, això vol dir que $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és injectiva; en canvi en el cas d'una corba tancada admetem $\alpha(a)=\alpha(b)$)

* α és parametrització regular si $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

P.ex., $\alpha(t)=(t^2,t^3)$, $-1 \leq t \leq 1$, no és regular ja que $\alpha'(0)=(0,0)$.

La corba recorreguda per una param. regular serà "sense punxes".



* C és corba regular si admet una parametrització regular i simple.

P.ex. en la circumf. $C=\{x^2+y^2=1\}$, abans hem donat la parametrització α que és regular i simple, i β que no és simple.

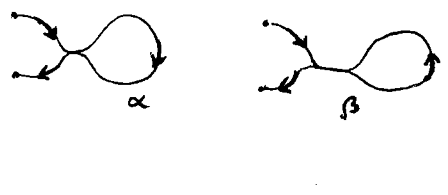
Propietat Dues parametritzacions regulars i simples d'una mateixa corba C són sempre equivalents.

Prova Siguin $\alpha(t)$, $t\in I$, i $\beta(s)$, $s \in J$, parametritzacions regulars i simples d'una corba C. Com que $\alpha: I \longrightarrow C$ i $\beta: J \longrightarrow C$ són bijectives, podem considerar
$$h=\alpha^{-1}\circ\beta: J \longrightarrow I,$$
bijectiva. Provarem que h és C^1 i que $h'(s)\neq 0 \ \forall s \in J$.

Fixem $s_0\in J$, i $t_0=h(s_0)$. Tenim $\alpha'(t_0)\neq 0$, suposem p.ex. que el 1er component d'aquest vector és no nul: $\alpha_1'(t_0)\neq 0$. Llavors, pel teo. de la funció inversa l'aplicació $\alpha_1: I \longrightarrow \mathbb{R}$ és invertible en un entorn de t_0. Com que $\beta_1(s)=\alpha_1(h(s))$, en un entorn de s_0 tindrem $h(s)=\alpha_1^{-1}(\beta_1(s))$, de classe C^1. A més, de la igualtat $\alpha'(h(s))\cdot h'(s)=\beta'(s)$ deduïm que $h'(s)\neq 0$ (ja que $\beta'(s)\neq 0$), en aquest entorn. Això ho podem fer per a cada $s_0 \in J$ (usant un component del vector o un altre).

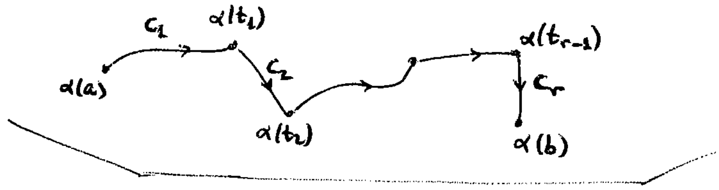
(**Nota.** En el cas d'una corba tancada, cal modificar una mica el raonament, i demanar que el punt d'inici i final sigui el mateix per a les dues parametritzacions

Observem que parametritzacions no simples, poden no ser equivalents:

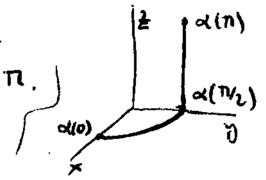


- També considerarem el cas d'una <u>corba regular a trossos</u>:
  $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$, amb $C_1, \dots, C_r$ corbes regulars de manera que el punt final de cada corba C_i coincideix amb el punt inicial de C_{i+1}, $\forall i$.

  En aquest cas, hi haurà una parametrització $\alpha : [a,b] \longrightarrow C$ contínua, amb α' contínua excepte en un nº finit de punts $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ en els quals α' presenta discontinuïtats de salt. Llavors cada "tros" $C_i = \alpha([t_{i-1}, t_i])$ és una corba regular.

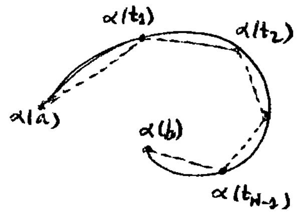


Exemple: $\alpha(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t, 0), & 0 \le t \le \pi/2 \\ (0, 1, 2t-\pi), & \pi/2 \le t \le \pi. \end{cases}$



Longitud d'una corba.

- Comencem definint la <u>longitud d'una trajectòria</u>, a partir de l'aproximació per línies poligonals.



$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1.

Donada una partició $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ (suposem regular, però de fet no és necessari), considerem la línia poligonal P_N formada pels segments que uneixen els punts $\alpha(t_{i-1})$ i $\alpha(t_i)$, $i = 1, \dots, N$.

La longitud de la línia poligonal és:

$$\text{long}(P_N) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|,$$

i pel teo. del valor mitjà tenim

$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)\cdot(t_i - t_{i-1})$, etc.

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i)-y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i)-z(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(\tilde{c}_i)^2 + z'(\tilde{\tilde{c}}_i)^2}\,.\,\Delta t,$$

per a certs valors $c_i, \tilde{c}_i, \tilde{\tilde{c}}_i \in]t_{i-1}, t_i[$, en general diferents, però propers.

Aleshores, es pot provar que $\exists \lim_{N \to \infty} (P_N) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$

Així, definim la <u>longitud de la trajectòria</u> α:

$$\boxed{\text{long}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt} \quad (\text{també s'escriu } \ell(\alpha))$$

(recordem que $\|\alpha'(t)\|$ és la velocitat de la trajectòria en cada punt).

- Exemples: probl. 1, 2, 3.

- Propietat. Dues trajectòries equivalents tenen la mateixa longitud.

  Prova: Considerem trajectòries $\alpha(t)$, $t\in I$, i $\beta(s)$, $s\in J$, equivalents per un canvi de paràmetre $t=h(s)$.

  $$\text{long}(\alpha)=\int_I \|\alpha'(t)\|\,dt \underset{\substack{\text{canvi}\\ t=h(s)}}{=} \int_J \|\alpha'(h(s))\|\cdot|h'(s)|\,ds=\int_J\|\beta'(s)\|\,ds=\text{long}(\beta).$$

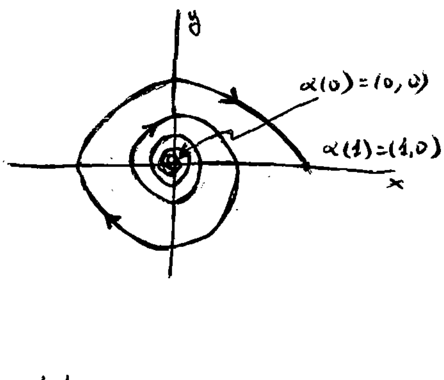
Això ens permet definir la longitud d'una corba regular com la de qualsevol parametrització regular i simple (ja que totes tenen la mateixa long.)

Def. Donada C corba regular, $C=\alpha(I)$ amb α parametrització regular i simple,
$$\text{long}(C)=\text{long}(\alpha)=\int_I\|\alpha'(t)\|\,dt.$$

- Per a una corba regular a trossos, $C=C_1\cup\dots\cup C_r$, definim la seva longitud com la suma de les longituds de cada tros;
$$\text{long}(C)=\sum_{i=1}^r \text{long}(C_i)=\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\alpha'(t)\|\,dt.$$

- Obs. Donada una trajectòria $\alpha: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$, si no imposem que sigui de classe C^1, o de classe C^1 a trossos, podem trobar-nos que té longitud infinita.

  Exemple. Considerem l'espiral plana definida per:
  $$\alpha(t)=\begin{cases}\left(t\cos\frac{2\pi}{t},\ t\cdot\sin\frac{2\pi}{t}\right) & \text{si } 0<t\le 1,\\ (0,0) & \text{si } t=0.\end{cases}$$



  Recordem que $t\cos\frac{2\pi}{t}$, $t\sin\frac{2\pi}{t}$ són funcions contínues i derivables, però no són C^1 en $t=0$.

  L'espiral dóna voltes a l'origen, cada cop més ràpides si $t\to 0^+$.

  Calculem: $\alpha'(t)=\left(\cos\frac{2\pi}{t}-\frac{2\pi}{t}\sin\frac{2\pi}{t},\ \sin\frac{2\pi}{t}+\frac{2\pi}{t}\cos\frac{2\pi}{t}\right)$, $t\neq 0$.
  $$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{t^2}} \rightsquigarrow \text{long}(\alpha)=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{t^2}}\,dt=\infty$$
  (integral impròpia divergent).

  De fet, en cada interval $\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ donem una volta a l'origen, de longitud
  $$l_k=\int_{\frac{1}{k+1}}^{1/k}\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{t^2}}\,dt\ge\int_{\frac{1}{k+1}}^{1/k}\frac{2\pi}{t}\,dt=2\pi\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),$$ i la sèrie $\sum_{k\ge1}l_k$ és divergent.

- Paràmetre arc

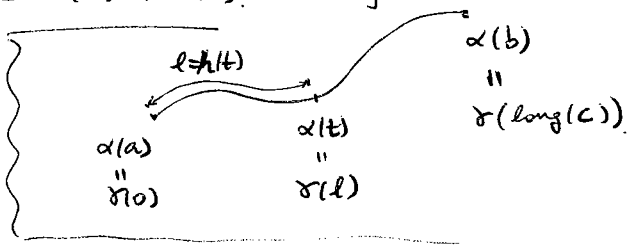
Sigui C corba regular. Donada una parametrització regular i simple $\alpha(t)$, $t\in[a,b]$, definim

$$l = h(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\|\, d\tau = \left[\begin{array}{l}\text{longitud del tram de corba}\\ \text{entre } \alpha(a) \text{ i } \alpha(t)\end{array}\right].$$

Llavors,

$$\begin{aligned} h: [a,b] &\longrightarrow [0, \operatorname{long}(C)] \\ t &\longmapsto l = h(t) \end{aligned}$$

és un canvi de paràmetre, ja que $h'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0 \quad \forall t\in[a,b]$.



Tenim així una nova parametrització $\gamma(l)$, $l\in[0,\operatorname{long}(C)]$, i el nou paràmetre l rep el nom de paràmetre arc de la corba C (en realitat, la corba té 2 paràmetres arc: un per a cada sentit). Aquest paràmetre recorre la corba C amb velocitat 1:

$$\alpha(t) = \gamma(h(t)) \quad \forall t \Longrightarrow \|\alpha'(t)\| = \|\gamma'(\underset{l}{h(t)})\|\cdot \underbrace{|h'(t)|}_{\|\alpha'(t)\|} \quad \forall t \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\|\gamma'(l)\| = 1\\ \forall l.\end{array}\right.$$

Això motiva escriure:

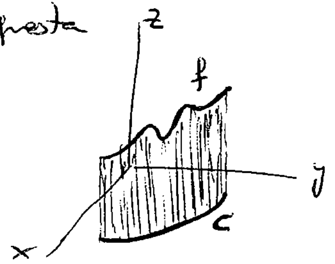
$$\operatorname{long}(C) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_C dl,$$

i podem dir que $\boxed{dl = \|\alpha'(t)\|\, dt}$ és l'element de longitud.

Integrals sobre corbes (integrals de trajectòria)

- Donada una corba C, i una funció $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$, volem definir la integral de f sobre la corba C, que escriurem $\int_C f\, dl$.

  En el cas d'una corba plana $C\subset\mathbb{R}^2$ i una funció $f\geq 0$, aquesta integral ens donarà l'àrea de la superfície compresa entre la corba C i la gràfica de f.

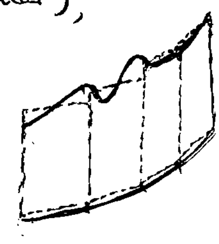


- Def. integral sobre una trajectòria.

  Considerem una trajectòria $\alpha(t)$, $t\in[a,b]$, la corba recorreguda C, i una funció $f: C\longrightarrow\mathbb{R}$. Donada una partició $a=t_0<t_1<\dots<t_N=b$, Donada una partició $a=t_0<t_1<\dots<t_N=b$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ (suposem regular), i escollint $c_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=1,\dots,N$, considerem les sumes

$$\sum_{i=1}^N f(\alpha(c_i))\,\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|.$$

[D'aquesta manera hem aproximat α per una línia poligonal, i l'àrea que volem calcular per una suma d'àrees de rectangles.]



Llavors, direm que f és <u>integrable</u> sobre la trajectòria α si $\exists$ el límit de les sumes anteriors quan $N \to \infty$ ($\Delta t \to 0$), independentment dels c_i escollits, i el valor del límit serà la <u>integral</u> de f sobre la trajectòria α:

$$\int_\alpha f\,dl = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\alpha(c_i)) \cdot \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \|$$

- Si f és contínua, es pot provar que és integrable sobre la traj. α, i que la integral ve donada per:

$$\boxed{\int_\alpha f\,dl = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\,dt}$$

Cas particular: amb $f \equiv 1$, obtenim $\int_\alpha dl = \text{long}(\alpha)$.

- <u>Propietat</u>. Si f contínua, i α i β són traject. equivalents, llavors $\int_\alpha f\,dl = \int_\beta f\,dl$.

<u>Prova</u>. Escrivim les parametritzacions $\alpha(t)$, $t \in I$, i $\beta(s)$, $s \in J$, i sigui $t = h(s)$ un canvi de paràmetre. Tenim:

$$\int_\alpha f\,dl = \int_I f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\,dt \underset{\substack{\text{canvi} \\ t=h(s)}}{=} \int_J f(\beta(s)) \cdot \underbrace{\|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)|}_{\|\beta'(s)\|} \cdot ds = \int_\beta f\,dl.$$

- <u>Def</u>. <u>integral sobre una corba</u>

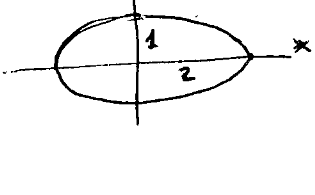
(a) C corba regular, f funció contínua sobre C.
La integral de f sobre C és $\int_C f\,dl = \int_\alpha f\,dl$,
essent α qualsevol parametrització regular i simple de C.

(b) C corba regular a trossos, $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$, f contínua sobre C,

$$\int_C f\,dl = \sum_{i=1}^{r} \int_{C_i} f\,dl.$$

(<u>Nota</u>. també es pot imposar f cont. a trossos)

<u>Exemple</u>. Integral de $f(x,y) = |xy|$ sobre l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.



Parametritzem l'el·lipse per $\alpha(t) = (2\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Tenim: $\alpha'(t) = (-2\sin t, \cos t)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\sin^2 t}$

$f(\alpha(t)) = |2\cos t \sin t|$

$$\int_C f\,dl = \int_0^{2\pi} \underbrace{f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|}_{h(t)}\,dt \underset{\left[\substack{h(t)\ \pi\text{-periòdica} \\ h(t) = h(\pi - t)}\right]}{=} 4\int_0^{\pi/2} 2\cos t \sin t \cdot \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\,dt \underset{\substack{u = \sin^2 t \\ du = 2\sin t \cdot \cos t\,dt}}{=} 4\int_0^1 \sqrt{1+3u}\,du = \frac{4}{3} \frac{(1+3u)^{3/2}}{3/2}\Bigg]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{9}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{56}{9}.$$

- Com que les integrals sobre corbes s'obtenen a partir d'integrals de funcions d'una variable (o com una suma d'aquestes), les propietats habituals de les integrals (linealitat, monotonia, additivitat, teo. de la mitjana) també seran vàlides en aquest cas.

  I.ex., si f contínua sobre C, llavors $\exists\, p \in C$: $\displaystyle\int_C f\,dl = f(p)\cdot \operatorname{long}(C)$
  (teo. de la mitjana)

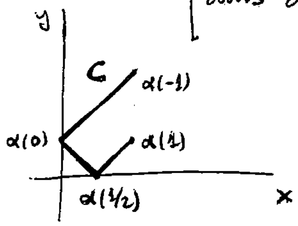
- Aplicacions.

  Les nocions de massa, centre de masses, moment d'inèrcia, ... es generalitzen al cas d'objectes que puguem modelitzar com a corbes.

  Així, per a una corba C amb una funció densitat $\rho : C \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\rho \geq 0)$, tindrem:

  * massa: $\displaystyle m(C) = \int_C \rho\, dl.$ (si $\rho \equiv$ const., llavors $m(C) = \rho \cdot \operatorname{long}(C)$)
  * centre de masses: $\displaystyle (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(C)} \cdot \left(\int_C x\rho\, dl, \int_C y\rho\, dl, \int_C z\rho\, dl \right)$
  * moment d'inèrcia resp. un eix:
    $\displaystyle I = \int_C r^2 \rho\, dl$, essent $r : C \longrightarrow \mathbb{R}$ la distància de cada punt de la corba a l'eix.

Exemple: Massa i centre de gravetat del filferro definit per $\alpha(t) = (|t|, |t - 1/2|)$, $-1 \leq t \leq 1$, amb densitat $\rho(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$.



$$\alpha(t) = \begin{cases} (-t, 1/2 - t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ (t, \frac{1}{2} - t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (t, t - 1/2) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \rho(\alpha(t)) = \begin{cases} \frac{2}{1-4t} \\ 2 \\ \frac{2}{4t-1} \end{cases}$$

(regular a trossos)

obs. $\rho(\alpha(t)) > 0 \ \forall t$.

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$ en els 3 intervals $]-1,0[$, $]0, 1/2[$, $]1/2, 1[$.

$$\boxed{m(C)} = \int_{-1}^{1} \rho(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\, dt = \sqrt{2} \left(\int_{-1}^{0} \frac{2}{1-4t}\, dt + \int_0^{1/2} 2\, dt + \int_{1/2}^{1} \frac{2}{4t-1}\, dt \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\left[-\frac{\ln(1-4t)}{2} \right]_{-1}^{0} + 1 + \left[\frac{\ln(4t-1)}{2} \right]_{1/2}^{1} \right) = \boxed{\sqrt{2} \left(1 + \frac{\ln 15}{2} \right)}$$

$$\int_C x\rho\, dl = \int_{-1}^{1} x(t)\, \rho(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\, dt = \sqrt{2} \left(\int_{-1}^{0} \frac{-2t}{1-4t}\, dt + \int_0^{1/2} 2t\, dt + \int_{1/2}^{1} \frac{2t}{4t-1}\, dt \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\left[\frac{t}{2} + \frac{\ln(1-4t)}{8} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{4} + \left[\frac{t}{2} + \frac{\ln(4t-1)}{8} \right]_{1/2}^{1} \right) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\ln 5/3}{8} \right)$$

$$\int_C y\rho\, dl = \int_{-1}^{1} y(t)\, \rho(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\, dt = \sqrt{2} \left(\int_{-1}^{0} \frac{1-2t}{1-4t}\, dt + \int_0^{1/2} (1-2t)\, dt + \int_{1/2}^{1} \frac{2t-1}{4t-1}\, dt \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\left[\frac{t}{2} - \frac{\ln(1-4t)}{8} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{4} + \left[\frac{t}{2} - \frac{\ln(4t-1)}{8} \right]_{1/2}^{1} \right) = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\ln 5/3}{8} \right)$$

c.d.m.: $$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1 - \frac{\ln 5/3}{8}}{1 + \frac{\ln 15}{2}}, \frac{1 + \frac{\ln 5/3}{8}}{1 + \frac{\ln 15}{2}} \right)}$$

Superfícies parametritzades

• Definicions

(a) Superfície parametritzada

Una aplicació $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longmapsto \Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

amb D domini elemental de $\mathbb{R}^2$, i Φ de classe C^1 i injectiva a $\mathring{D}$.

(Nota : Recordem que D és domini elemental si és compacte i ∂D és d'àrea zero, però a la pràctica també es pot considerar D obert.)

(b) La superfície associada a la parametrització Φ, serà

$$S = \Phi(D) = \{ \Phi(u,v) : (u,v) \in D \}$$

u,v : paràmetres o coordenades

(c) **Les corbes coordenades de la parametrització** Φ, per un punt $p_0 = \Phi(u_0, v_0)$, són les imatges de

$$u \longmapsto \Phi(u, v_0),$$
$$v \longmapsto \Phi(u_0, v)$$

(venen definides fixant un dels paràmetres : $v = v_0$ o bé $u = u_0$)

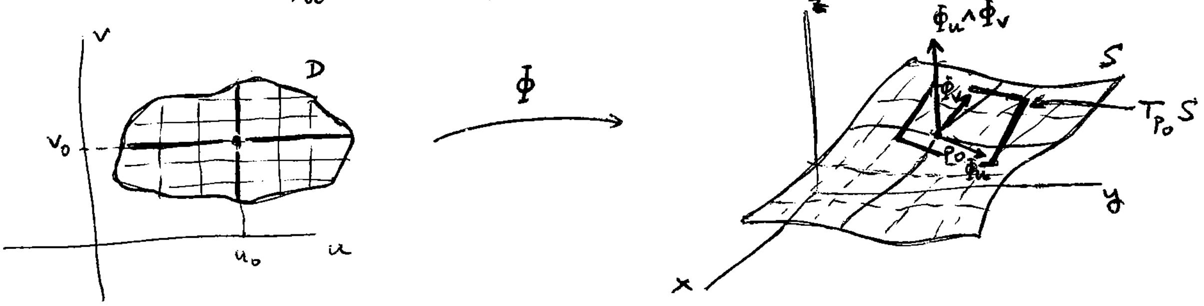
(d) El pla tangent a la superfície en el punt $p_0 = \Phi(u_0,v_0)$, és el pla generat pels vectors tangents a les corbes coordenades,

$$T_{p_0} S = [\, \Phi_u(u_0,v_0),\ \Phi_v(u_0,v_0) \,], \qquad \Phi_u(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \right)$$

$$\Phi_v(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \right)$$

(es pot comprovar que aquest pla no depèn de la parametrització escollida)

La direcció normal a la superfície S en el punt p_0 ve donada pel producte vectorial $\Phi_u(u_0,v_0) \wedge \Phi_v(u_0,v_0)$ (és un vector ortogonal al pla $T_{p_0} S$)



(e) La parametrització Φ de S és regular (o suau) si els vectors $\Phi_u(u,v)$, $\Phi_v(u,v)$ són linealment independents $\forall\, (u,v) \in \mathring{D}$ (llavors, el subspai que generen és realment un pla). Això equival a demanar que $\Phi_u \wedge \Phi_v \neq 0$ a tot $\mathring{D}$.

(f) Direm que S és superfície regular si admet una parametrització regular. Llavors no té punxes ni arestes, ja que en tot punt hi ha pla tangent.

- Exemples.

1) Gràfica d'una funció de 2 variables, $f: D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

$\longrightarrow$ superfície S definida per l'equació $\underline{\underline{z=f(x,y)}}$

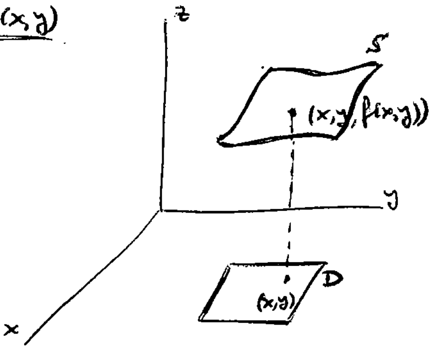
Parametrització: $\Phi(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $(x,y)\in D$.

calculem: $\Phi_x = (1,0,f_x)$

$\Phi_y = (0,1,f_y)$

$\Rightarrow$ vector normal: $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0$

$\longrightarrow$ és superfície regular.



2) Superfície S definida implícitament, $\underline{F(x,y,z)=0}$, amb F de classe C^1.

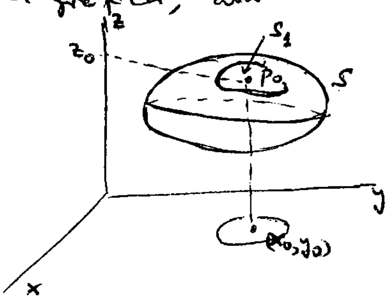
Considerem un punt $p_0 = (x_0,y_0,z_0)\in S$, tal que $\nabla F(p_0) = (F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0)) \neq (0,0,0)$.
(vector gradient en p_0)

Suposant p.ex. $F_z(p_0)\neq 0$, pel teo. func. implícita podem aïllar $z=z(x,y)$ en un entorn de p_0.

Així, veiem una part de la superfície, $S_1\subset S$, com una gràfica, amb parametrització $\Phi(x,y) = (x,y,z(x,y))$

Vector normal: $\Phi_x\wedge\Phi_y = (-z_x, -z_y, 1) =$

$$= \left(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1\right) \parallel (F_x,F_y,F_z) = \underline{\nabla F}$$



Anàlogament si hem aïllat $x=x(y,z)$ o $y=y(x,z)$, en tots els casos el gradient ens dóna un vector normal en cada punt de la superfície.

3) Cilindre: $S=\{x^2+y^2=R^2,\ 0\leq z\leq h\}$

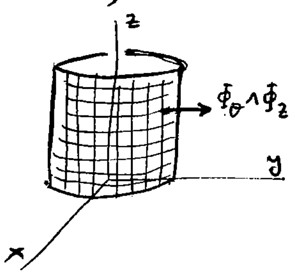
Parametrització: $\Phi(\theta,z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$, $(\theta,z)\in D=[0,2\pi]\times[0,h]$,

injectiva a $\mathring{D} =]0,2\pi[\times]0,h[$

Vector normal: $\Phi_\theta\wedge\Phi_z = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) = (x,y,0)\neq 0$

$\longrightarrow$ és sup. regular.

Corbes coordenades: $\left|\begin{array}{l} z=\text{const.} \rightarrow \text{circumferències horitzontals} \\ \theta=\text{const.} \rightarrow \text{rectes verticals} \end{array}\right.$



4) Esfera: $S=\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$

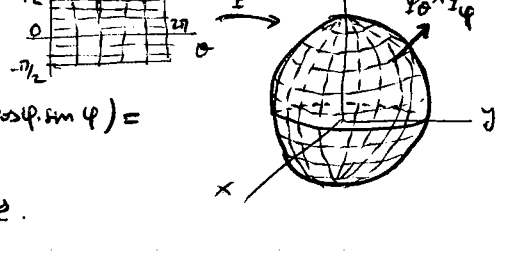
Parametrització: $\Phi(\theta,\varphi) = (R\cos\varphi.\cos\theta, R\cos\varphi.\sin\theta, R\sin\varphi)$, $(\theta,\varphi)\in D=[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$

injectiva a $\mathring{D}$ (però no a D, obs. que $\Phi(\theta,\pm\frac{\pi}{2}) = (0,0,\pm R)$ $\forall\theta$)

Calculem: $\left.\begin{array}{l}\Phi_\theta = (-R\cos\varphi.\sin\theta, R\cos\varphi.\cos\theta, 0) \\ \Phi_\varphi = (-R\sin\varphi.\cos\theta, -R\sin\varphi.\sin\theta, R\cos\varphi)\end{array}\right\}$

$\rightarrow$ vector normal: $\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi = (R^2\cos^2\varphi.\cos\theta, R^2\cos^2\varphi.\sin\theta, R^2\cos\varphi.\sin\varphi) =$

$= R.\cos\varphi.(x,y,z) \neq 0$ a $\mathring{D}$



Corbes coordenades: $\varphi=$ const. $\rightarrow$ paral·lels, $\theta=$ const. $\rightarrow$ meridians.

- Superfícies de revolució

Considerem en el pla xz una corba C, amb una parametrització

$$\alpha(t) = (f(t), 0, g(t)), \quad a \le t \le b. \qquad (\text{corba generatriu, o secció})$$

Suposem que C és corba regular, continguda en el semiplà $x>0$;

així tenim: $\alpha'(t) = (f'(t), 0, g'(t)) \neq (0,0,0)$, $f(t)>0 \quad \forall t \in]a,b[$

Llavors, la superfície de revolució generada en girar la corba C al voltant de l'eix z, ve definida per la parametrització:

$$\Phi(\theta, t) = (f(t)\cos\theta, f(t)\cdot\sin\theta, g(t)), \quad (\theta, t) \in D = [0, 2\pi]\times[a,b]$$

injectiva sobre $\mathring{D}$.

Tenim: $\Phi_\theta = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cdot\cos\theta, 0)$

$\Phi_t = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\cdot\sin\theta, g'(t))$

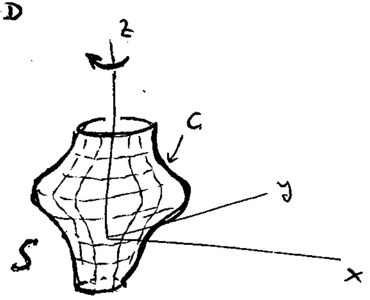
$\longrightarrow$ vector normal:

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_t = (f(t)g'(t)\cos\theta, f(t)g'(t)\sin\theta, -f(t)\cdot f'(t)) \neq 0,$$

ja que $\|\Phi_\theta\wedge\Phi_t\|^2 = f(t)^2\cdot(g'(t)^2 + f'(t)^2) \neq 0 \quad \forall(\theta,t)\in\mathring{D}$

$\longrightarrow$ superfície regular.

Així, $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| = f(t)\cdot\|\alpha'(t)\|$. [Nota: posaríem $|f(t)|$ si la corba C fos al semiplà $x<0$.]

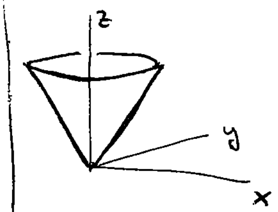


Corbes coordenades: $t = \text{const.} \to$ paral·lels

$\theta = \text{const.} \to$ meridians

[Nota. Si la corba C ve definida implícitament per $G(x,z)=0$, llavors la sup. de revolució té l'equació $G(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$]

Exemple. con de revolució. $z^2 = a^2(x^2+y^2)$, $0\le z\le h$, $(a>0)$



Sup. de revolució generada per la recta $z = ax$

Parametritzem la recta,

$$C: \ \alpha(z) = \left(\tfrac{z}{a}, 0, z\right), \quad 0\le z\le h.$$

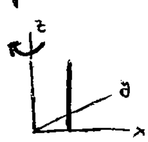
Obtenim la parametrització

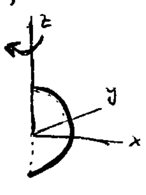
$$S: \ \Phi(\theta, z) = \left(\tfrac{z}{a}\cdot\cos\theta, \tfrac{z}{a}\cdot\sin\theta, z\right)$$

$$0\le\theta\le 2\pi, \ 0\le z\le h.$$

injectiva sobre $\mathring{D}$ (però $\Phi(\theta,0) = (0,0,0) \ \forall\theta$ $\hookrightarrow$ la "punxa" del con)

- El cilindre ve generat per la recta $\alpha(z) = (R, 0, z)$, $0\le z\le h$.
- L'esfera ve generada per la semicircumferència $\alpha(\varphi) = (R\cos\varphi, 0, R\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

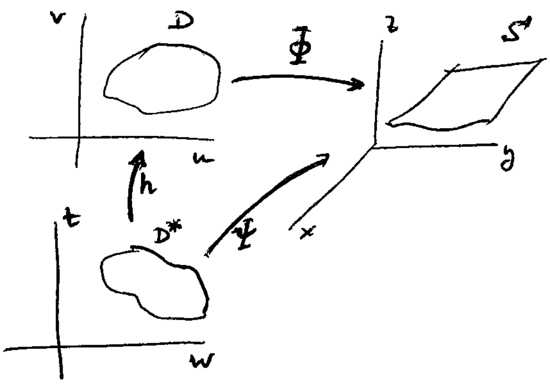




• **Def.** <u>parametritzacions equivalents</u>

Considerem dues parametritzacions d'una mateixa superfície $S=\Phi(D)=\Psi(D^*)$, amb $\Phi: D \to \mathbb{R}^3$ i $\Psi: D^* \to \mathbb{R}^3$. Direm que les parametritzacions Φ i Ψ són equivalents si $\exists\, h: D^* \to D$ bijectiva, amb h i h^{-1} de classe C^1, tal que $\Psi = \Phi \circ h$.

Llavors, direm que $(u,v)=h(w,t)$ és un <u>canvi de paràmetre</u>.



Pel teo. f. inversa, tota $h: D^* \to D$ bijectiva, C^1, i amb $Jh(w,t) \neq 0$ $\forall (w,t) \in D^*$, és un canvi de paràmetre.

Aplicant la regla de la cadena a la igualtat $\Psi(w,t)=\Phi(h(w,t))$, deduïm:

$$D\Psi(w,t) = D\Phi(h(w,t)) \cdot Dh(w,t)$$

$$\left(\boxed{\Psi_w} \boxed{\Psi_t} \right) = \left(\boxed{\Phi_u} \boxed{\Phi_v} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

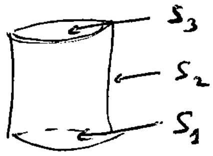
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Psi_w = a_1\Phi_u + a_3\Phi_v \\ \Psi_t = a_2\Phi_u + a_4\Phi_v \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Psi_w \wedge \Psi_t} = (a_1a_4 - a_2a_3)\cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \boxed{Jh(w,t)\cdot \Phi_u \wedge \Phi_v}$$

Per tant, el pla tangent T_pS és el mateix per a les dues parametritzacions, ja que els vectors normals són proporcionals.

<u>Propietat</u>. Dues parametritzacions <u>regulars</u> d'una mateixa superfície són equivalents.

• **Def.** una <u>superfície regular a trossos</u> és $S=S_1 \cup \dots \cup S_r$, on cada S_i és superfície regular, i les interseccions $S_i \cap S_j$ tenen lloc al llarg de corbes regulars a trossos.

<u>Exemple</u>. $W=\{(x,y,z):\ x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ (cilindre sòlid)



$S=\partial W = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ és sup. regular a trossos.

Per a cada tros podem donar una parametrització:

S_1: $\Phi_1(x,y)=(x,y,0)$, $\quad x^2+y^2 \leq R^2$

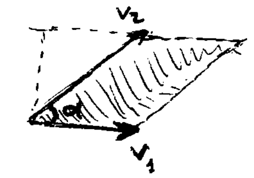
S_2: $\Phi_2(\theta,z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq h$.

S_3: $\Phi_3(\theta,z) = (x,y,h)$, $\quad x^2+y^2 \leq R^2$

Àrea d'una superfície

- Recordem la fórmula de l'àrea d'un paral·lelogram, generat per dos vectors:

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$,

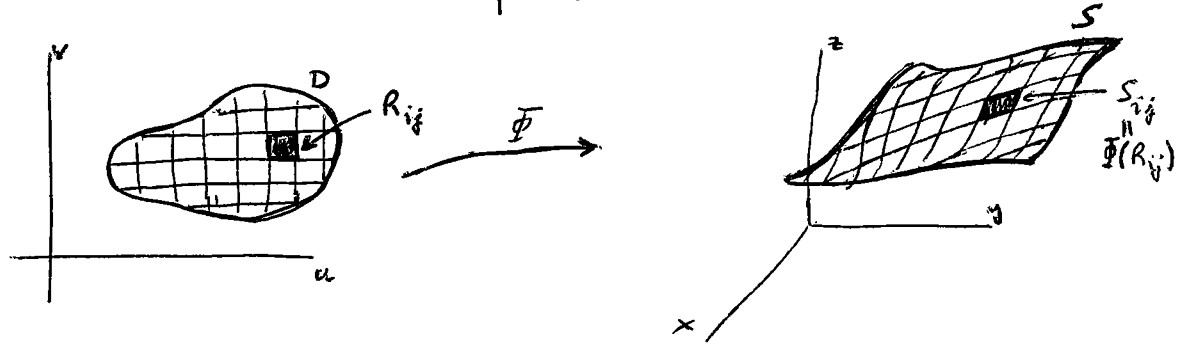


$$A = \|v_1 \wedge v_2\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_1,v_2\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{vmatrix}}$$

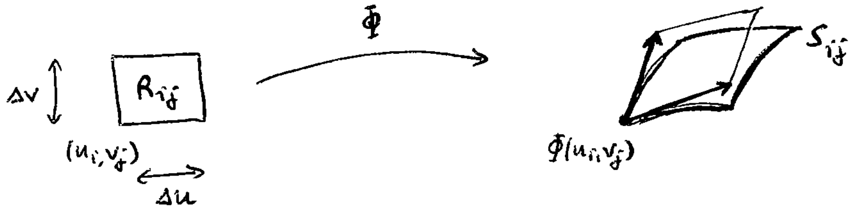
$\Bigg($ ja que $A = \underbrace{\|v_1\|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\|v_2\| \cdot \sin\alpha}_{\text{alçada}}$, i d'altra banda $\begin{vmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_1,v_2\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{vmatrix} =$
$= \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cdot \cos^2\alpha \Bigg)$

- Considerem una superfície parametritzada $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $S = \Phi(D)$.

Per definir l'àrea, comencem amb una partició



Aproximem cada tros S_{ij} per un paral·lelogram contingut en el pla tangent a S en un dels seus vèrtexs:



Aproximem: $\Phi(u_i + \Delta u, v_j) - \Phi(u_i, v_j) \simeq \Phi_u(u_i, v_j) \cdot \Delta u$
$\Phi(u_i, v_j + \Delta v) - \Phi(u_i, v_j) \simeq \Phi_v(u_i, v_j) \cdot \Delta v$ → vectors que generen el paral·lelogram.

Llavors, $$A(S) = \sum_{i,j} A(S_{ij}) \simeq \sum_{i,j} \|\Phi_u(u_i, v_j) \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \cdot \Delta u\, \Delta v,$$

i passant al límit definim:

$$\boxed{A_\Phi(S) = \int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|\, du\, dv}$$

<u>àrea d'una superfície parametritzada</u>

(sempre $\exists$ i és finita, ja que D és domini elemental i Φ_u, Φ_v són contínues)

També podem escriure: $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$, essent $E = \langle \Phi_u, \Phi_u\rangle$, $G = \langle \Phi_v, \Phi_v\rangle$,
$F = \langle \Phi_u, \Phi_v\rangle$.

- Propietat | Dues parametritzacions equivalents d'una mateixa superfície tenen la mateixa àrea.

Prova. $S = \Phi(D) = \Psi(D^*)$, $h : D^* \longrightarrow D$ canvi de paràmetre.

$$A_\Phi(S) = \int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du\, dv \underset{\text{canvi } h}{=} \int_{D^*} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \cdot |Jh| \, dw\, dt = \int_{D^*} \|\Psi_w \wedge \Psi_t\| \, dw\, dt = A_\Psi(S)$$

Això permet definir l'àrea d'una superfície regular com la de qualsevol parametrització regular:
$\boxed{A(S) = A_\Phi(S)}$, essent Φ parametritz. regular de S.

Notació: $\boxed{dS = dA = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}$ element de superfície o d'àrea.

i llavors s'escriu $A(S) = \int_S dS$

- En el cas d'una superfície regular a trossos, definim la seva àrea com la suma de les àrees de cada tros,
$S = S_1 \cup \cdots \cup S_r \longrightarrow A(S) = \sum_{i=1}^{r} A(S_i)$

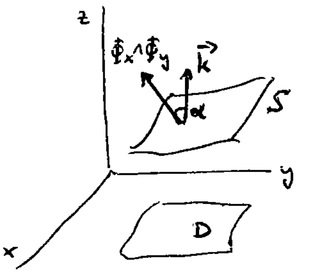
- Exemple. Àrea d'una gràfica $z = f(x,y)$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

$\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $\longrightarrow$ recordem $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$

$$\boxed{A(S) = \int_D \|\Phi_x \wedge \Phi_y\| \, dx\, dy = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy} \quad \text{(probl. 18)}$$

Obs. $\Phi_x \wedge \Phi_y$ és un vector normal a S, orientat cap amunt.

Sigui $\alpha = \alpha(x,y)$ l'angle que forma $\Phi_x \wedge \Phi_y$ amb la direcció vertical, $\vec{k} = (0,0,1)$.

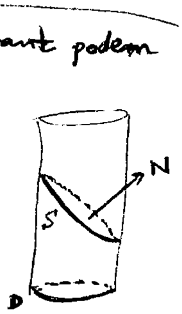


Tenim:
$1 = \langle \Phi_x \wedge \Phi_y, \vec{k} \rangle = \|\Phi_x \wedge \Phi_y\| \cdot \cos\alpha = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow$ Podem escriure:
$$\boxed{A(S) = \int_D \frac{1}{\cos\alpha}\, dx\, dy.}$$

També tenim:
$\cos\alpha = \langle N, \vec{k} \rangle$,
essent $N = \dfrac{\Phi_x \wedge \Phi_y}{\|\Phi_x \wedge \Phi_y\|}$ vector normal unitari.

En el cas que S sigui un tros de pla, tindrem $\alpha = $ const. i per tant podem escriure: $A(S) = \dfrac{A(D)}{\cos\alpha}$ (D és la projecció de S sobre el pla xy)



P.ex. si $S = \{ \underbrace{2x + y + 3z = 1}, \ x^2 + y^2 \le 1 \}$; $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$, $A(D) = \pi$.

$\hookrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3) \to \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{14}} \to A(S) = \frac{\sqrt{14}\,\pi}{3}$

• <u>Àrea d'una superfície de revolució.</u>

Corba generatriu o secció C: $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $a \le t \le b$.

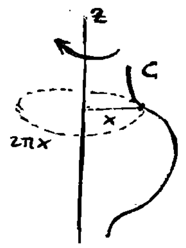
Superfície de revolució S (girant C al voltant de l'eix z):

$$\Phi(\theta, t) = (f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ g(t)), \quad \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le t \le b}_{D}$$

$$\| \Phi_\theta \wedge \Phi_t \| = f(t) \cdot \| \alpha'(t) \| = f(t) \cdot \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \qquad (\text{si } f(t) > 0)$$

$$\boxed{A(S) = \int_D \| \Phi_\theta \wedge \Phi_t \| \, d\theta\, dt = 2\pi \int_a^b f(t) \cdot \|\alpha'(t)\| \, dt = 2\pi \int_C x \, dl} \qquad \left(\begin{array}{l} x = \text{dist. de cada punt} \\ \text{a l'eix de gir.} \end{array} \right)$$

Per tant, $A(S)$ és la integral, sobre la corba C, de les longituds de les circumferències recorregudes per tots els punts de la corba.



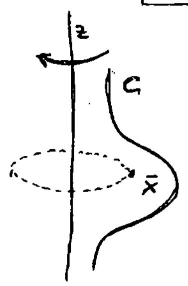
[Exemples: <u>probl. 17, 26</u>

Podem donar una fórmula alternativa, recordant que el centre de masses de la corba C ve donat per $(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{\text{long}(C)} \left(\int_C x\, dl,\ \int_C z\, dl \right)$.

Llavors,

$$\boxed{A(S) = \text{long}(C) \cdot 2\pi \bar{x}}$$

<u>Primer teorema de Pappus - Guldin</u>: l'àrea de la superfície de revolució S és el producte de la longitud de la corba generatriu C per la longitud de la circumferència descrita pel seu centre de masses.



[Exemples: <u>probl. 22, 24</u>

<u>Integral d'una funció sobre una superfície.</u>

• Considerem una superfície parametritzada $S = \Phi(D)$, $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, i una funció $f : S \to \mathbb{R}$. Per definir la integral de f sobre la superfície, es procedeix de manera anàloga al cas de corbes.

Donada una partició de D en subrectangles R_{ij} cal escollir $c_{ij} \in R_{ij}$ i considerar les sumes $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le N} f(\Phi(c_{ij})) \cdot \| \Phi_u(c_{ij}) \wedge \Phi_v(c_{ij}) \| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$

(en realitat, cal prendre un rectangle $R \supset D$ i restringir la suma als $R_{ij} \subset D$)

Passant al límit $N \to \infty$, es diu que f és integrable sobre $S = \Phi(D)$ si el límit existeix, i el valor del límit és la integral $\int_\Phi f\, dS$.

- Si f és contínua, és integrable i tenim: $\boxed{\int_\Phi f\,dS = \int_D f(\Phi(u,v))\cdot\|\Phi_u\wedge\Phi_v\|\,du\,dv.}$

(Cas particular: $f\equiv 1 \rightsquigarrow \int_\Phi dS = A_\Phi(S)$.

Si Φ i Ψ són parametritzacions equivalents de la superfície S, llavors $\int_\Phi f\,dS = \int_\Psi f\,dS$.

- Def
  (a) S superfície regular, f contínua sobre S (o cont. a trossos)
  $$\int_S f\,dS = \int_\Phi f\,dS \quad , \text{ essent } \Phi \text{ qualsevol parametrització regular de } S.$$
  (b) S superfície regular a trossos, $S = S_1\cup\cdots\cup S_r$,
  $$\int_S f\,dS = \sum_{i=1}^r \int_{S_i} f\,dl. \qquad \text{(també pot ser } f \text{ cont. a trossos)}$$

- Aplicacions: massa, centre de masses, moment d'inèrcia, ...
  Són anàlogues al cas de corbes

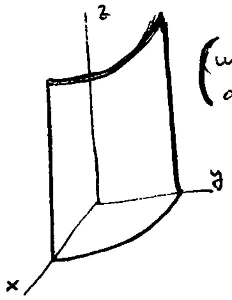
Exemples.

1) Integral de la funció $f(x,y,z) = x+1$ sobre la superfície $S = \{z = x^2-y^2,\ x^2+y^2\le 1\}$

Tenim una gràfica $z = z(x,y) = x^2-y^2$ (paraboloide hiperbòlic) $\rightsquigarrow$ Parametrització:
$\Phi(x,y) = (x,y,z(x,y))$, $(x,y)\in D = \{x^2+y^2\le 1\}$,
recordem: $\|\Phi_x\wedge\Phi_y\| = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$

Llavors,
$$\int_S f\,dS = \int_D f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy =$$
$$= \int_D (x+1)\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \underset{\text{polars}}{=} \int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(r\cos\theta+1)\sqrt{1+4r^2}\cdot\underset{\text{(jacobià)}}{r}\,d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$
$$= 0 + 2\pi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr = 2\pi\,\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2\cdot 8}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1)$$

2) Integral de $f(x,y,z) = x+z$ sobre $S = \{x^2+y^2=9,\ x\ge 0, y\ge 0,\ 0\le z\le 5\}$

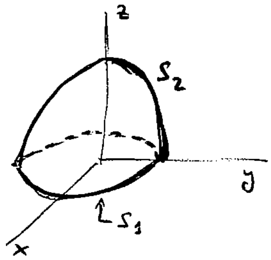


(un quadrant de cilindre) $\longrightarrow$ Parametritzem:
$\Phi(\theta,z) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, z)$, $\underbrace{0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le 5}_{D}$

$\Phi_\theta\wedge\Phi_z = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$

$$\int_S f\,dS = \int_D f(\Phi(\theta,z))\cdot\|\Phi_\theta\wedge\Phi_z\|\,d\theta\,dz = 3\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^5(3\cos\theta+z)\,dz =$$
$$= 3\int_0^{\pi/2}d\theta\cdot\left[3\cos\theta\cdot z+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=5} = 3\int_0^{\pi/2}\left(15\cos\theta+\frac{25}{2}\right)d\theta = 45+\frac{75\pi}{4}$$

3) Integral de $f(x,y,z) = xz+1$ sobre la superfície S que envolta el volum determinat per $0 \le z \le 1-x^2-y^2$.



$W = \{0 \le z \le 1-x^2-y^2\}$, $\quad S = \partial W = S_1 \cup S_2$, sup. regular a trossos.

Farem: $\displaystyle\int_S f\,dS = \int_{S_1} f\,dS + \int_{S_2} f\,dS$.

* $S_1 = \{z=0,\ x^2+y^2 \le 1\}$, $f(x,y,0) = 1$ sobre S_1.

$$\longrightarrow \int_{S_1} f\,dS = A(S_1) = \pi$$

* $S_2 = \{z = 1-x^2-y^2,\ x^2+y^2 \le 1\}$, gràfica: $\Phi(x,y) = (x,y,z(x,y)) = (x,y,1-x^2-y^2)$, $\underbrace{x^2+y^2\le 1}_{D}$

$$\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

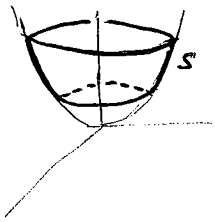
$$\int_{S_2} f\,dS = \int_D f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = \int_D \left(x(1-x^2-y^2)+1\right)\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \overset{\text{polars}}{=}$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta\cdot(1-r^2)+1\right)\cdot\sqrt{1+4r^2}\,\underset{\text{(jacobià)}}{r}\,d\theta = 0 + 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$

Sumant, $\displaystyle\int_S f\,dS = \pi + \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right) = \frac{5(1+\sqrt{5})\pi}{6}$

4) Massa total de la superfície $z = x^2+y^2$, $1 \le z \le 4$, amb la funció densitat $\rho = |x|$.



Parametritzem: $\Phi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, $D = \{1 \le x^2+y^2 \le 4\}$
(gràfica)

$$\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

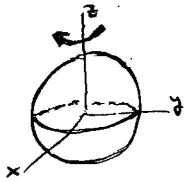
$$m(S) = \int_S \rho\,dS = \int_D |x|\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy \overset{\text{polars}}{=} \int_{D^*} |r\cos\theta|\cdot\sqrt{1+4r^2}\cdot\underset{\text{(jacobià)}}{r}\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_1^2 r^2\sqrt{1+4r^2}\,dr\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}|\cos\theta|\,d\theta}_{=4} \overset{r=\frac{1}{2}\sinh u}{=} \frac{1}{2}\int_{\operatorname{argsinh}2}^{\operatorname{argsinh}4} \sinh^2 u\cdot\cosh^2 u\,du = \frac{1}{16}\int_{\operatorname{argsinh}2}^{\operatorname{argsinh}4}(\cosh 4u - 1)\,du =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{\sinh 4u}{4} - u\right]_{\operatorname{argsinh}2}^{\operatorname{argsinh}4} = \frac{1}{16}\left(132\sqrt{17} - 18\sqrt{5} - \operatorname{argsinh}4 + \operatorname{argsinh}2\right)$$

$\sinh 4u = 4\sinh u\,(1+2\sinh^2 u)\cdot\cosh u$

5) Moment d'inèrcia respecte l'eix z de la superfície de l'esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, amb densitat $\rho \equiv$ const.



Parametritzem l'esfera: $\Phi(\theta,\varphi) = (\underbrace{R\cos\varphi\cdot\cos\theta}_{x}, \underbrace{R\cos\varphi\cdot\sin\theta}_{y}, \underbrace{R\sin\varphi}_{z})$, $\underbrace{0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}_{D}$.

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi = R\cdot\cos\varphi\cdot(x,y,z) \longrightarrow \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| = R^2\cos\varphi$$

Moment d'inèrcia:

$$I_z = \int_S (x^2+y^2)\rho\,dS = \int_D R^2\cos^2\varphi\cdot\rho\cdot R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi = 2\pi R^4\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi = 2\pi R^4\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= 2\pi R^4\rho\cdot\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi R^4\rho\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi R^4\rho$$

(2.1) Longitud d'una corba

① Trobeu la longitud d'una circumferència.

Circumferència de radi r : $x^2+y^2=r^2$

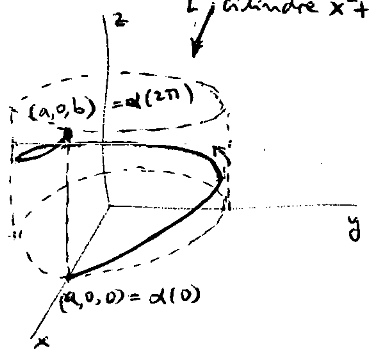
$\rightarrow$ parametrització : $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, $\|\alpha'(t)\| = r$.
(velocitat constant)

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} r\,dt = \underline{\underline{2\pi r}}.$$

② Trobeu la longitud d'una espiral de l'hèlice $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$.

[continguda en el cilindre $x^2+y^2=a^2$]

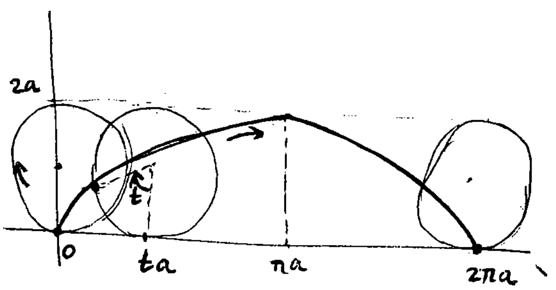


$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$. (vel. constant)

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \underline{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}.$$

③ Trobeu la longitud de l'arc de cicloide $\alpha(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$.



[corba descrita per un punt d'una circumferència de radi a, que roda sobre l'eix x.]

$\alpha'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$

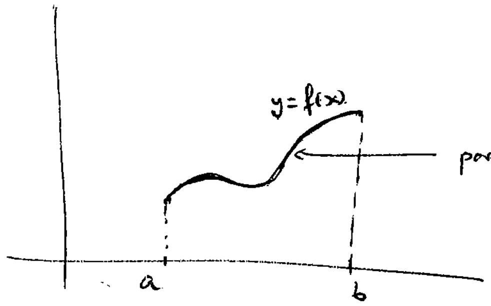
$\|\alpha'(t)\| = a\cdot\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = a\cdot\sqrt{2(1-\cos t)} =$

$= 2a\sin\frac{t}{2}$ (≥ 0 si $0 \le t \le 2\pi$)

(Observem: la velocitat màxima s'assoleix quan $t=\pi$.)

$$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{t}{2}\,dt = -4a\cos\tfrac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8a}}.$$

(4) Proveu que la longitud de la gràfica d'una funció $y = f(x)$, $a \le x \le b$, ve donada per la integral $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Calculeu la longitud de la corba $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$.



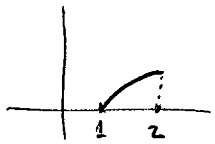
parametrització : $\alpha(x) = (x, f(x))$, $a \le x \le b$.

$$\alpha'(x) = (1, f'(x))$$

$$\|\alpha'(x)\| = \sqrt{1+f'(x)^2}$$

$$\Rightarrow \text{long}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

* $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$.



$$\text{long} = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du =$$

$u = \sqrt{x^2+1}$
$u\,du = x\,dx$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}\right) du = u + \ln\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\,\Bigg]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

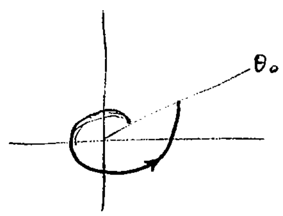
(5) Proveu que la longitud de la corba l'expressió de la qual en coordenades polars és $r = f(\theta)$, $a \le \theta \le b$, ve donada per la integral $\int_a^b \sqrt{f^2+(f')^2}\,d\theta$. Com a aplicació trobeu la longitud d'una espira de l'espiral logarítmica, $r = ae^{b\theta}$.

$r = f(\theta) \rightsquigarrow$ en coord. cartesianes, $\alpha(\theta) = (f(\theta)\cos\theta,\ f(\theta)\sin\theta)$, $a \le \theta \le b$
(θ : paràmetre)

$$\alpha'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,\ f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)$$

$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} \rightsquigarrow \text{long}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}\,d\theta.$$

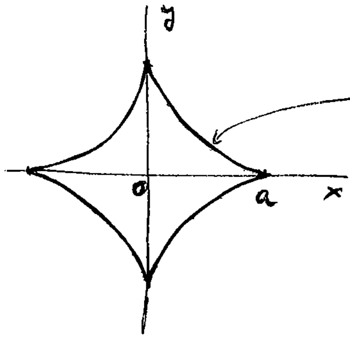
* $r = ae^{b\theta}$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_0 + 2\pi$



$$\text{long}(\alpha) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{(ae^{b\theta})^2 + (abe^{b\theta})^2} = a\sqrt{1+b^2}\cdot\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^{b\theta}\,d\theta =$$

$$= a\sqrt{1+b^2}\cdot\frac{e^{b\theta}}{b}\Bigg]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\cdot e^{b\theta_0}\left(e^{2\pi b}-1\right)$$

⑥ Troben la longitud de l'astroide, l'equació de la qual és $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.



És corba "regular a trossos" (un per cada quadrant).

Tros en el 1er quadrant:

$$y=f(x)=\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2},\quad 0\le x\le a.\ \text{(gràfica)}.$$

Aplicant el probl. 4,

$$\text{long}=4\int_0^a\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=4\int_0^a\sqrt{1+\left(-\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}\cdot x^{-1/3}\right)^2}\,dx=$$

$$=4\int_0^a\sqrt{1+\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)\cdot x^{-2/3}}\,dx=4\int_0^a a^{1/3}\cdot x^{-1/3}dx=4a^{1/3}\cdot\frac{x^{2/3}}{2/3}\Big]_0^a=\underline{\underline{6a}}.$$

* També podem parametritzar l'astroide per:

$$\alpha(t)=\left(a\cos^3t,\ a\sin^3t\right),\quad 0\le t\le 2\pi$$

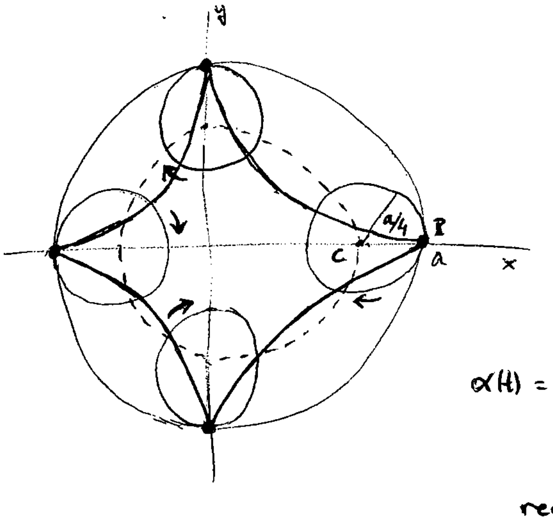
$$\rightarrow\quad \alpha'(t)=\left(-3a\cos^2t\sin t,\ 3a\sin^2t\cdot\cos t\right)$$

$$\|\alpha'(t)\|=3a\sqrt{(\cos^2t\sin t)^2+(\sin^2t\cdot\cos t)^2}=3a\,|\cos t\cdot\sin t|$$

Calculant-la a partir del tram $0\le t\le\pi/2$ (1er quadrant),

$$\text{long}=4\int_0^{\pi/2}\|\alpha'(t)\|\,dt=12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt=12a\cdot\frac{\sin^2t}{2}\Big]_0^{\pi/2}=\underline{\underline{6a}}.$$

L'astroide és una hipocicloide de 4 puntes: la corba descrita per un punt fixat d'una circumferència de radi $a/4$, que fem rodar per l'interior d'una circumferència de radi a.



$$\alpha(t)=\underbrace{\frac{3a}{4}(\cos t,\sin t)}_{\substack{\text{recorregut del centre C}\\ \text{de la circumferència}\\ \text{petita.}}}+\underbrace{\frac{a}{4}(\cos 3t,-\sin 3t)}_{\substack{\text{recorregut del punt P en}\\ \text{relació al centre C}\\ \text{(per cada angle }\pi/2\text{ descrit}\\ \text{per C, el punt P en descriu }-3\pi/2\text{).}}}=a(\cos^3t,\sin^3t).$$

(2.2) Integral d'una funció sobre una corba respecte de l'element de longitud.

(9) Determinem la massa M de la primera espira de l'hèlice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$, si la densitat $f(P)$ en cada punt és proporcional a la longitud del radi vector d'aquest punt.

$$\alpha(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ ht),\quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+h^2}$$

Densitat: $f(\alpha(t)) = k\,\|\alpha(t)\| = k\sqrt{a^2+h^2t^2}$

$$M = \int_\alpha f\,dl = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\cdot\|\alpha'(t)\|\,dt = k\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+h^2t^2}\,dt = \frac{k}{h}\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{2\pi h}\sqrt{a^2+u^2}\,du =$$

$u = ht$

$u = a\sinh v$
$du = a\cosh v\,dv$

$$= \frac{ka^2}{h}\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a}}\cosh^2 v\,dv = \frac{ka^2}{2h}\sqrt{a^2+h^2}\left[v + \frac{\sinh 2v}{2}\right]_0^{\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a}} =$$

$\cosh^2 v = \dfrac{1+\cosh 2v}{2}$

$\sinh 2v = 2\sinh v\cdot\cosh v$

$$= \frac{ka^2}{2h}\sqrt{a^2+h^2}\cdot\left(\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a} + \frac{2\pi h}{a}\sqrt{1+\frac{4\pi^2h^2}{a^2}}\right) = k\sqrt{a^2+h^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2h^2} + \frac{a^2}{2h}\operatorname{argsinh}\frac{2\pi h}{a}\right).$$

(10) Trobem la massa de tota l'astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, si $f(P) = |xy|$.

$\alpha(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.

$\|\alpha'(t)\| = 3a\,|\cos t\cdot\sin t|$ $\quad$ (probl. 6)

Densitat: $f(\alpha(t)) = |x(t)\cdot y(t)| = a^2\,|\cos^3 t\cdot\sin^3 t|$

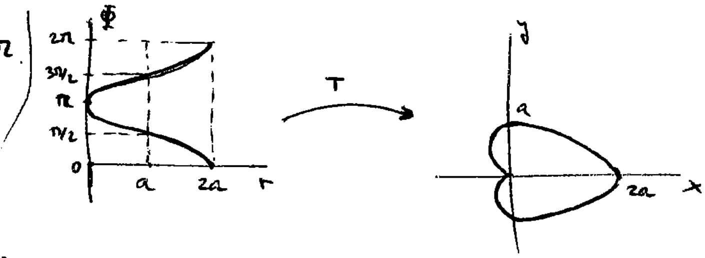
$$M = \int_\alpha f\,dl = 3a^3\int_0^{2\pi}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt = 12a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt =$$

funció $\frac{\pi}{2}$-periòdica.

$$= 12a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) = 6a^3\,\frac{\Gamma(5/2)^2}{\Gamma(5)} = 6a^3\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{4!} = \frac{9\pi a^3}{64}.$$

(11) Troben la massa de tota la cardioide $r=a(1+\cos\Phi)$, si $f(P)=k\sqrt{r}$.

$r=r(\Phi)=a(1+\cos\Phi)$, $\quad 0\le\Phi\le 2\pi$



Parametrització en les coord. x,y:

$$\alpha(\Phi)=(x(\Phi),y(\Phi))=(r(\Phi)\cos\Phi,\ r(\Phi)\cdot\sin\Phi)$$

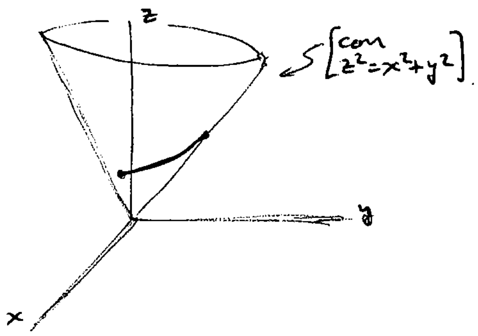
$$\|\alpha'(\Phi)\| = \sqrt{r'(\Phi)^2+r(\Phi)^2} = \sqrt{a^2(-\sin\Phi)^2+a^2(1+\cos\Phi)^2} = a\sqrt{2(1+\cos\Phi)}$$

(calculat al probl. 5)

Densitat: $f(\alpha(\Phi)) = k\sqrt{r(\Phi)} = k\sqrt{a(1+\cos\Phi)}$

$$\longrightarrow M=\int_\alpha f\,dl = \int_0^{2\pi} f(\alpha(\Phi))\cdot\|\alpha'(\Phi)\|\,d\Phi = ka\sqrt{2a}\int_0^{2\pi}(1+\cos\Phi)\,d\Phi = \underline{k\pi(2a)^{3/2}}.$$

(12) Troben la massa de l'arc de l'hèlice cònica $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, si la densitat és $f=ke^t$, des del punt $O=(a,0,a)$ fins al punt $A=(0,ae^{\pi/2},ae^{\pi/2})$



$\alpha(t)=(ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t)$, $\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

$\alpha'(t)=(ae^t(\cos t-\sin t),\ ae^t(\sin t+\cos t),\ ae^t)$

$\|\alpha'(t)\| = ae^t\cdot\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1^2} = \sqrt{3}\,ae^t$.

$$M=\int_\alpha f\,dl = \int_0^{\pi/2} ke^t\cdot\sqrt{3}ae^t\,dt = k\sqrt{3}a\cdot\left.\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{ka\cdot\frac{\sqrt{3}(e^\pi-1)}{2}}.$$

(13) Troben la massa de la semicircumferència $x^2+y^2=r^2$ situada en el semiplà superior, si la densitat d'aquesta semicircumferència en cada punt és proporcional al cub de l'ordenada en aquest punt (el coeficient de proporcionalitat és β)

$\alpha(t)=(r\cos t,\ r\sin t)$, $\quad 0\le t\le\pi$; $\quad \|\alpha'(t)\|=r$.

$\rho(x,y)=\beta y^3 \quad\leadsto\quad \rho(\alpha(t))=\beta r^3\sin^3 t$

$$M=\int_\alpha \rho\,dl = \int_0^\pi \beta r^3\sin^3 t\cdot r\,dt = \beta r^4\int_0^\pi(1-\cos^2 t)\sin t\,dt = \beta r^4\left[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \underline{\frac{4}{3}\beta r^4}$$

(14) Troben la temperatura mitjana d'un filferro $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, si la temperatura és $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

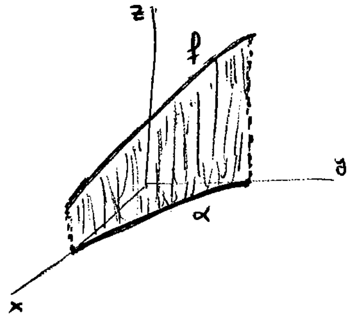
$$v_m(f) = \frac{1}{\text{long}(\alpha)} \int_\alpha f \, dl .$$

$$\left.\begin{aligned} \text{long}(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \cdot 2\pi . \\ \int_\alpha f \, dl &= \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \cdot \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_m(f) = 1 + \frac{4\pi^2}{3} .$$

(15) Troben l'àrea i l'altura mitjana d'una tanca la base de la qual està descrita per la corba parametritzada (hipocicloide) $\alpha(t) = (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, i l'altura de la qual està donada per la funció $f(x,y) = 1 + y/3$.

$\alpha(t) = (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ $\rightsquigarrow$ hipocicloide o astroide (només primer quadrant)

$\|\alpha'(t)\| = 90 \cos t \cdot \sin t$ (probl. 6)



* Àrea $= \displaystyle\int_\alpha f \, dl = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{30 \sin^3 t}{3}\right) \cdot 90 \cos t \sin t \, dt =$

$$= \int_0^{\pi/2} (90 \sin t + 900 \sin^4 t) \cos t \, dt =$$

$$= \left[90 \frac{\sin^2 t}{2} + 900 \frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{90}{2} + \frac{900}{5} = 225 .$$

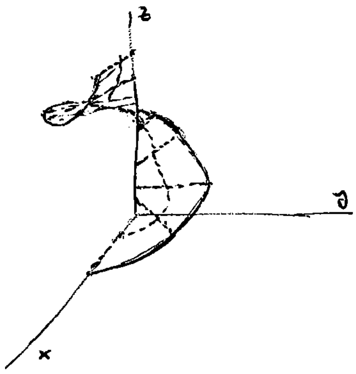
* Altura mitjana:

$$v_m(f) = \frac{1}{\text{long}(\alpha)} \int_\alpha f \, dl = \frac{225}{45} = 5 .$$

$\text{long}(\alpha) = \frac{6 \cdot 30}{4} = 45$
(probl. 6)

(2.3) Àrea d'una superfície

(16) Troben l'àrea de l'helicoide $\Phi(u,v) = (u\cos v,\ u \sin v,\ av)$, $0 \leq u \leq L$, $0 \leq v \leq 2\pi$.



corbes coordenades:

$\underline{v = v_0}$: $u \longmapsto (u\cos v_0, u \sin v_0, a v_0)$, $0 \leq u \leq L$,

segments amb un extrem a l'eix z.

$\underline{u = u_0}$: $v \longmapsto (u_0 \cos v, u_0 \sin v, av)$, $0 \leq v \leq 2\pi$,

hèlixs.

$S = \Phi(D)$, $\quad D = \{(u,v) : 0 \leq u \leq L,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

Calculem: $\Phi_u = (\cos v, \sin v, 0)$

$\Phi_v = (-u \sin v, u \cos v, a)$

$\Phi_u \wedge \Phi_v = (a \sin v, -a \cos v, u) \neq 0$ sobre $\mathring{D}$ $\to$ superfície regular.

$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{a^2+u^2}$.

$$A(S) = \int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|\, du\, dv = \int_D \sqrt{a^2+u^2}\, du\, dv = 2\pi \int_0^L \sqrt{a^2+u^2}\, du =$$

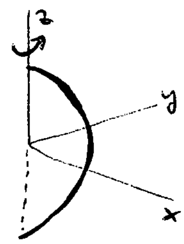
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{L}{2}\sqrt{a^2+L^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argsinh} \frac{L}{a} \right) = \boxed{\pi L \sqrt{a^2+L^2} + \pi a^2 \underbrace{\operatorname{argsinh} \frac{L}{a}}_{\ln \frac{L+\sqrt{L^2+a^2}}{a}}}$$

(17) Troben l'àrea de la superfície d'una esfera.

$\Phi(\theta, \varphi) = (R\cos\varphi \cdot \cos\theta,\ R\cos\varphi \cdot \sin\theta,\ R \sin\varphi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$A(S) = \int_D \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|\, d\theta\, d\varphi = \int_D \underline{\underline{R^2 \cos\varphi}}\, d\theta\, d\varphi = R^2 \cdot 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \underline{4\pi R^2}.$$

* També podem utilitzar que l'esfera és la superfície de revolució obtinguda en girar la semicircumferència $\alpha(\varphi) = (\underbrace{R\cos\varphi}_{f(\varphi)}, 0, \underbrace{R\sin\varphi}_{g(\varphi)})$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, al voltant de l'eix z:



$$A(S) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) \sqrt{f'(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\, d\varphi = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\varphi \cdot R\, d\varphi = \underline{4\pi R^2}.$$

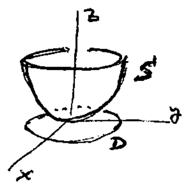
(18) Proveu que l'àrea d'una gràfica $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, ve donada per la integral $\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$. Com a aplicació, troben l'àrea de la gràfica $z = x^2+y^2$, essent $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

Parametrització de la gràfica: $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in D$.

Tenim:
$$\Phi_x = (1, 0, f_x)$$
$$\Phi_y = (0, 1, f_y)$$
$$\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

Llavors, $A(S) = \int_D \|\Phi_x \wedge \Phi_y\|\,dx\,dy = \int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$.

* Aplicació: $z = x^2+y^2$, $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$
(paraboloide)

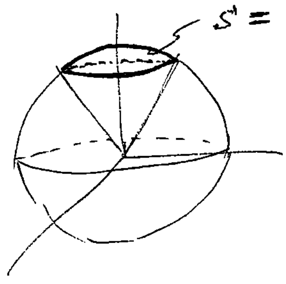


$$A(S) = \int_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dx\,dy \underset{\text{canvi a polars}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \left.\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$

(20) Troben l'àrea de la part de l'esfera unitària determinada pel con $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$



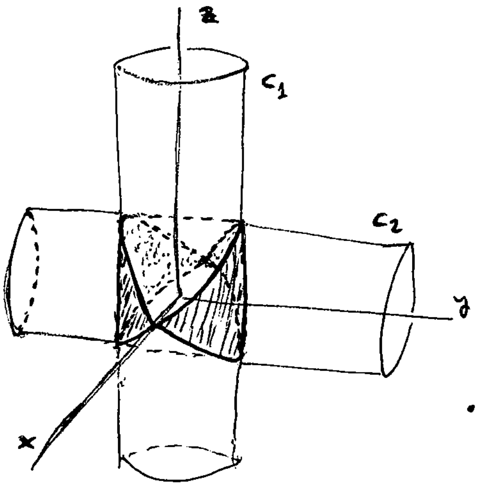
Prenem coordenades esfèriques sobre l'esfera unitària,
$\Phi(\theta,\varphi) = (\cos\varphi \cdot \cos\theta,\ \cos\varphi \cdot \sin\theta,\ \sin\varphi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Llavors S ve definida per $z \geq \sqrt{x^2+y^2} \rightsquigarrow \sin\varphi \geq \cos\varphi$, és a dir $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$.

Per tant, $S = \Phi(D)$, essent $D = \{(\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.
(un casquet esfèric)

$$A(S) = \int_D \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|\,d\theta\,d\varphi = \int_D \cos\varphi\,d\theta\,d\varphi = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

21 Trobeu l'àrea de la superfície d'un cilindre interceptada per una altra superfície cilíndrica igual d'eix perpendicular.



Cilindres: $C_1 = \{x^2+y^2=a^2\}$

$C_2 = \{x^2+z^2=a^2\}$

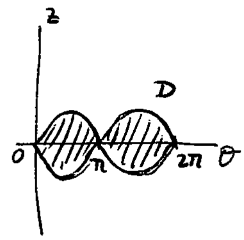
- Parametrització del cilindre C_1:

$$\Phi(\theta,z) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ z),\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ z\in\mathbb{R}.$$

- La superfície S està formada pels punts del cilindre C_1 que es troben dins la regió tancada pel cilindre C_2:

$$x^2+z^2\le a^2$$
$$(a\cos\theta)^2+z^2\le a^2$$
$$z^2\le a^2\sin^2\theta$$
$$|z|\le a|\sin\theta|.$$

Així, $S=\Phi(D)$, essent $D=\{(\theta,z):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ |z|\le a|\sin\theta|\}$



- Àrea:

$$A(S)=\int_D \|\Phi_\theta\wedge\Phi_z\|\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_{-a|\sin\theta|}^{a|\sin\theta|}a\,dz =$$

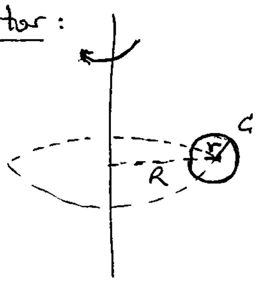
$$= 2a^2\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \underline{\underline{8a^2}}.$$

22 Trobeu l'àrea d'una superfície de revolució i proveu el primer teorema de Pappus-Guldin: l'àrea d'una superfície de revolució és igual a la longitud de la secció per la longitud de l'arc recorregut pel centre de gravetat d'aquesta secció. Apliqueu el resultat per trobar l'àrea de la superfície d'un tor.

* Secció C: $\alpha(t)=(f(t),0,g(t)),\ a\le t\le b,$ (suposem $f(t)>0$) $\rightsquigarrow$ sup. de revolució S (girant C al voltant de l'eix z): $\Phi(\theta,t)=(f(t)\cos\theta,\ f(t)\sin\theta,\ g(t)),\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ a\le t\le b.$

$$A(S)=\int_D\|\Phi_\theta\wedge\Phi_t\|\,d\theta\,dt = \int_D f(t)\,\|\alpha'(t)\|\,d\theta\,dt = 2\pi\int_a^b f(t)\|\alpha'(t)\|\,dt = 2\pi\int_C x\,dl = \text{long}(C)\cdot\underbrace{2\pi\bar{x}}_{\substack{\text{arc recorregut}\\ \text{pel centre de}\\ \text{masses de } C.}}$$

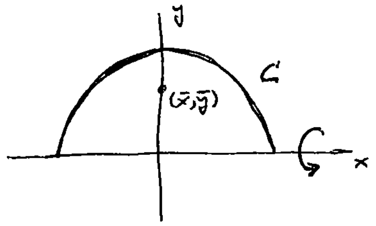
* Àrea d'un tor:



C: circumferència de centre $(R,0,0)$ i radi r en el pla xz.

Tenim: $\left.\begin{array}{l}\text{long}(C)=2\pi r\\ \bar{x}=R \text{ per simetria.}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A(S)=2\pi r\cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR}$

(24) Feu servir el teorema de Pappus–Guldin per trobar el centre de gravetat d'una semicircumferència.



$C = \{(x,y) : x^2+y^2=R^2,\ y \geq 0\}$

$\bar{x}=0$ per simetria.

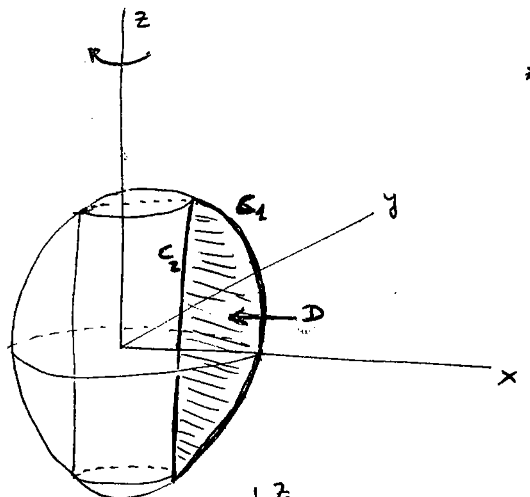
Fent girar C al voltant de l'eix x, la superfície generada és una esfera de radi R. Tenim:

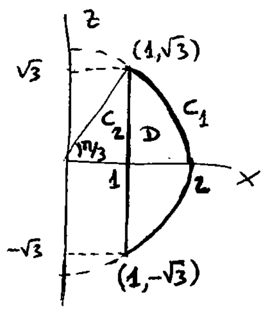
$$A(S) = \text{long}(C)\cdot 2\pi\bar{y}$$

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2R}{\pi}.$$

$$\text{c.d.m.} = \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$$

(26) Es perfora una bola sòlida de radi 2 amb una broca cilíndrica de radi 1 (l'eix de la broca passa pel centre de la bola). Calculeu el volum resultant i l'àrea de la superfície que l'envolta.





* $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 1\}$, sòlid de revolució obtingut de la regió

$D = \{(x,0,z) : x^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 1\}$, quan la fem girar al voltant de l'eix z.

$$\boxed{\text{vol}(W)} = 2\pi \int_D x\,dx\,dz = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_1^{\sqrt{4-z^2}} x\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=\sqrt{4-z^2}} = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-z^2)\,dz = \pi\left[3z-\frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \boxed{4\sqrt{3}\,\pi}$$

* $S = \partial W = S_1 \cup S_2$ (superfície regular a trossos).

S_1: sup. de revolució generada per la corba C_1, parametritzada per $\alpha(\varphi) = (2\cos\varphi, 0, 2\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

$$A(S_1) = 2\pi \int_{C_1} x\,dl = 2\pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\cos\varphi \cdot 2\,d\varphi = 8\pi\left[\sin\varphi\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 8\sqrt{3}\,\pi.$$

$dl = \|\alpha'(\varphi)\|\,d\varphi = 2\,d\varphi$

S_2 és generada per la recta C_2, de centre $(\bar{x}_2,\bar{z}_2)=(1,0)$.

$A(S_2) = \text{long}(C_2)\cdot 2\pi\bar{x}_2 = 2\sqrt{3}\cdot 2\pi = 4\sqrt{3}\,\pi$ (cilindre)

$$\boxed{A(S)} = A(S_1)+A(S_2) = \boxed{12\sqrt{3}\,\pi}$$

(2.4) Integral d'una funció sobre una superfície respecte de l'element d'àrea

(27) Determineu el moment estàtic respecte al pla Oxy i la posició del centre de masses de la semiesfera homogènia $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z\geq 0)$.

Def. Moment estàtic de la superfície S respecte el pla π:

$$M=\int_S d(p,\pi)\cdot \rho(p)\, dS \quad , \quad \text{essent } d(p,\pi): \text{distància d'un punt } p\in S \text{ al pla } \pi.$$

$\rho(p)$: densitat en el punt p.

Parametritzem : $\Phi(\theta,\varphi)=(R\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ R\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ R\sin\varphi)$, $\underbrace{0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}_{D}$.

$\rho\equiv$ const. (esfera homogènia) $\qquad \|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\| = R^2\cos\varphi$.

- Moment estàtic resp. el pla Oxy $(z=0)$:

$$M=\int_S d\cdot\rho\, dS = \rho\cdot\int_D R\sin\varphi\cdot R^2\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi = \rho R^3\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\, d\varphi =$$

$d=|z|=R\sin\varphi$ (dist. al pla $z=0$)

$$= \rho\cdot R^3\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi\rho R^3 .$$

- Centre de masses : $\bar{x}=\bar{y}=0$ (per simetria) $\quad \bar{z}=\frac{1}{A(D)}\cdot\int_S z\, dS$.

$$A(D)=\int_S dS = \int_D R^2\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi = R^2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\varphi = 2\pi R^2$$

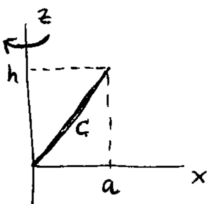
$$\int_S z\, dS = \int_D R\sin\varphi\cdot R^2\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi = \pi R^3 \quad \text{(calculat abans)}$$

$$\longrightarrow \bar{z}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}.$$

c.d.m. $=(0,0,R/2)$.

(28) Es considera una distribució de càrregues elèctriques sobre la superfície del con d'altura h i radi a en la base. En cada punt de la superfície la densitat de la càrrega és proporcional a la z-coordenada d'aquest punt $(e=kz)$. El vèrtex del con està en l'origen de les coordenades, el seu eix està dirigit segons l'eix Oz. Determineu la càrrega total.

Càrrega total : $\quad Q=\int_S e\, dS$, essent e la densitat de càrrega en cada punt (pot ser positiva o negativa).



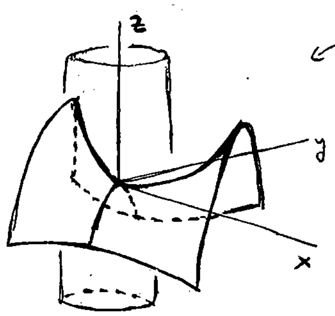
Obtenim el con S en girar, resp. l'eix z, la recta C parametritzada per $\alpha(z)=\left(\frac{az}{h},0,z\right)$, $0\leq z\leq h$.

Parametrització de S: $\Phi(\theta,z)=\left(\frac{az}{h}\cos\theta,\ \frac{az}{h}\sin\theta,\ z\right)$, $\underbrace{0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq h}_{D}$.

$$\|\Phi_\theta\wedge\Phi_z\| = f(z)\cdot\|\alpha'(z)\| = \frac{az}{h}\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2+1} = \frac{a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}\, z$$

$$Q=\int_S e\, dS = \int_D kz\cdot\frac{a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}\, z\, d\theta\, dz = \frac{ka\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}\cdot 2\pi\int_0^h z^2\, dz = \frac{2\pi k a h\sqrt{a^2+h^2}}{3}$$

(29) Determineu la massa de la superfície del paraboloide hiperbòlic $2az = x^2-y^2$, tallada pel cilindre $x^2+y^2=a^2$, si la densitat en cada punt de la superfície és igual a $k|z|$.



S = part del paraboloide hiperbòlic que queda dins del cilindre.

Parametrització: $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $\quad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2a}$.

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$

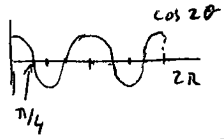
Vector normal: $\|\Phi_x \wedge \Phi_y\| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{-y}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}$

Densitat: $\rho(x,y) = k|z| = k|f(x,y)| = \frac{k}{2a}|x^2-y^2|$

Massa:
$$m(S) = \int_S \rho\, dS = \int_D \rho(x,y)\cdot\|\Phi_x\wedge\Phi_y\|\,dx\,dy = \frac{k}{2a^2}\int_D |x^2-y^2|\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\text{polars}}{=}$$

$$= \frac{k}{2a^2}\int_{D^*} |r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta|\sqrt{a^2+r^2}\cdot \underbrace{r}_{\text{jacobià}}\,dr\,d\theta = \frac{k}{2a^2}\cdot\int_0^{2\pi}|\cos^2\theta-\sin^2\theta|\,d\theta\cdot\int_0^a r^3\sqrt{a^2+r^2}\,dr$$

Calculem:
$$\int_0^{2\pi}|\cos^2\theta-\sin^2\theta|\,d\theta = \int_0^{2\pi}|\cos 2\theta|\,d\theta = 8\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = 4$$



$$\int_0^a r^3\sqrt{a^2+r^2}\,dr = \int_a^{\sqrt{2}a}(u^2-a^2)u^2\,du = \left.\frac{u^5}{5}-\frac{a^2u^3}{3}\right]_a^{\sqrt{2}a} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}a^5 \Longrightarrow \boxed{m(S) = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}ka^3}$$

canvi $u=\sqrt{a^2+r^2}$
$\to r = \sqrt{u^2-a^2}$, $dr = \frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}}du$

[també es pot fer el canvi $r = a\sinh v$]

(30) Determineu el moment d'inèrcia de la superfície lateral homogènia del con $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le a)$ respecte de l'eix Oz.

Parametrització: $\Phi(\theta,z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$, $\underbrace{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le a}_{D}$

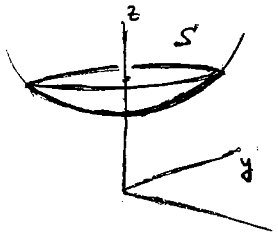
$\|\Phi_\theta\wedge\Phi_z\| = \sqrt{2}\cdot z$

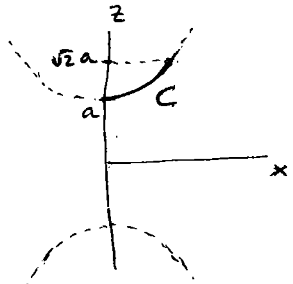
Densitat $\rho \equiv$ const. (homogènia).

Moment d'inèrcia:
$$I = \int_S \underbrace{(x^2+y^2)}_{\substack{\text{quadrat de la}\\ \text{dist. a l'eix z}}}\rho\,dS = \rho\int_D z^2\sqrt{2}z\,d\theta\,dz = \rho\cdot\sqrt{2}\cdot 2\pi\int_0^a z^3\,dz = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cdot\rho a^4.$$

(31) Determineu la càrrega elèctrica total distribuïda sobre la superfície de l'hiperboloide de dues fulles $z^2 = x^2+y^2+a^2$, $a \le z \le a\sqrt{2}$, si la densitat de càrrega en cada punt ~~és~~ proporcional a la z-coordenada d'aquest punt ($e = kz$).

$z^2 = x^2+y^2+a^2 \longrightarrow$ sup. de revolució generada per la hipèrbola $z^2 = x^2+a^2$ $(x \geq 0)$, en girar-la al voltant de l'eix z.
(hiperboloide de 2 fulles o no reglat)





Corba generatriu en el pla xz (hipèrbola);

$$C: \quad \alpha(z) = (\underbrace{\sqrt{z^2-a^2}}_{f(z)},\ 0,\ z), \quad a \le z \le \sqrt{2}\,a$$

$\downarrow$

Superfície de revolució (hiperboloide de 2 fulles);

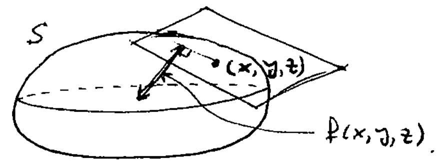
$$S: \quad \Phi(\theta, z) = \left(\sqrt{z^2-a^2}\cdot\cos\theta, \sqrt{z^2-a^2}\,\sin\theta,\ z\right), \quad \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le z \le \sqrt{2}\,a}_{D}.$$

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = f(z)\cdot\|\alpha'(z)\| = \sqrt{z^2-a^2}\cdot\sqrt{\frac{z^2}{z^2-a^2}+1} = \sqrt{2z^2-a^2}$$

$$Q = \int_S e\,dS = \int_D kz\sqrt{2z^2-a^2}\,d\theta\,dz = k\cdot 2\pi\cdot\int_a^{\sqrt{2}a} z\sqrt{2z^2-a^2}\,dz = k\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{(2z^2-a^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot 4}\right]_a^{\sqrt{2}a} =$$

$$= \frac{\pi k}{3}\left((3a^2)^{3/2} - (a^2)^{3/2}\right) = \frac{(3\sqrt{3}-1)\pi}{3}\,ka^3$$

(32) Sigui S l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, i $f(x,y,z)$ la funció definida sobre S de la manera següent: donat $(x,y,z) \in S$, $f(x,y,z)$ és la distància des de l'origen al pla tangent a S en el punt (x,y,z). Calculeu la integral de f sobre S.



* Donat un pla π d'equació $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \delta$ i un punt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, la distància de p_0 a π és:

$$d(p_0, \pi) = \frac{|\delta - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

* Si el pla π passa per $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, és de la forma $\alpha(X-x_1)+\beta(Y-y_1)+\gamma(Z-z_1) = 0$. Llavors $\delta = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1$ i tenim $d(p_0,\pi) = \frac{|\alpha(x_1-x_0)+\beta(y_1-y_0)+\gamma(z_1-z_0)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = |\langle \vec{N}, \overrightarrow{p_0p_1}\rangle|$ (*)

Parametritzem S amb "coordenades el·lipsoidals":

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\underbrace{a\cos\varphi\cdot\cos\theta}_{x}, \underbrace{b\cos\varphi\cdot\sin\theta}_{y}, \underbrace{c\sin\varphi}_{z}), \quad \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}_{D}$$

Calculem: $\Phi_\theta = (-a\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ b\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ 0)$

$\Phi_\varphi = (-a\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ -b\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ c\cos\varphi)$

$\rightarrow$ vector normal: $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi = (bc\cos^2\varphi\cdot\cos\theta,\ ac\cos^2\varphi\cdot\sin\theta,\ ab\cos\varphi\cdot\sin\varphi) = abc\cos\varphi\cdot\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$

El pla tangent per $\Phi = (x,y,z)$ té com a vector normal unitari $N = \frac{\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}$

Llavors, $f(x,y,z) \underset{(*)}{=} |\langle N, \Phi\rangle|$; $f\cdot\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\| = |\langle \Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi, \Phi\rangle| = abc\cos\varphi\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) = abc\cos\varphi$

$$\boxed{\int_S f\,dS = \int_D f(\Phi(\theta,\varphi))\cdot\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|\,d\theta\,d\varphi = \int_D abc\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi = abc\cdot 2\pi\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi abc}$$