5. INTEGRALS DE CAMPS VECTORIALS

Camps vectorials

Fins ara hem integrat funcions escalars o camps escalars, definides a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ i amb valors a $\mathbb{R}$. Ara considerarem camps vectorials, és a dir, funcions que prenen valors a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

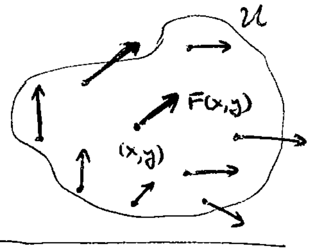
- Def. * Un camp vectorial pla, sobre $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, és una aplicació que a cada punt li assigna un vector,

$$F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

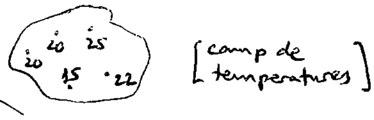
Pot ser continu, derivable, C^∞, etc.

* Un camp vectorial sobre $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ és

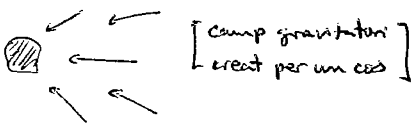
$$F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

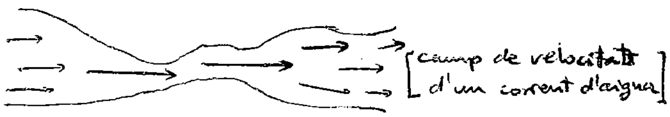


- Hi ha molts fenòmens físics que venen descrits per camps escalars, com la temperatura en cada punt d'un domini.



Però d'altres fenòmens requereixen considerar camps vectorials, com ara:
  - un camp de forces (gravitatori, elèctric, ...)
  - un camp magnètic
  - camp de velocitats d'un fluid.



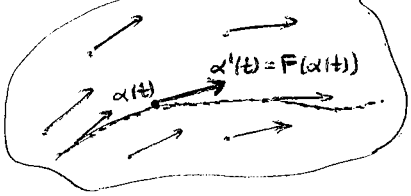


- Línies de flux o de corrent

Donat un camp vectorial $F = (P, Q, R)$, les línies de flux o de corrent de F són les solucions o trajectòries $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del sistema (autònom) d'EDOs:

$$X' = F(X), \quad \text{és a dir,} \quad \begin{cases} x' = P(x,y,z) \\ y' = Q(x,y,z) \\ z' = R(x,y,z) \end{cases}$$

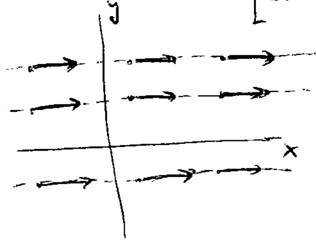
Si F és el camp de velocitats d'un fluid, les línies de flux $\alpha(t)$ serien les trajectòries seguides per cadascuna de les partícules del fluid.



Exemples de línies de flux:

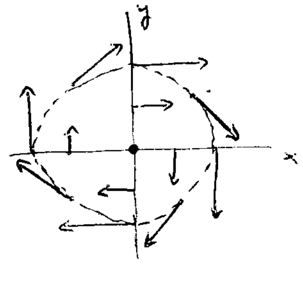
(1) $F(x,y) = (1, 0)$, constant.

$\alpha(t) = (x_0 + t, y_0)$ [solució de $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$ amb la cond. inicial $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$]



(2) $F(x,y) = (y, -x)$

$\alpha(t) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t)$



(3) $F(x,y,z) = (x, y, z)$

$\alpha(t) = (e^t x_0, e^t y_0, e^t z_0)$

[segueixen rectes que s'allunyen de l'origen]

- **Camps gravitatori i elèctric (camps newtonians).**

Són exemples importants de camps de forces.

* camp gravitatori / elèctric creat per 1 partícula (massa puntual / càrrega puntual).

Donades masses m, m_1 situades en els punts (x,y,z), (x_1,y_1,z_1), segons la llei de la gravitació universal de Newton la força d'atracció entre les dues masses és:

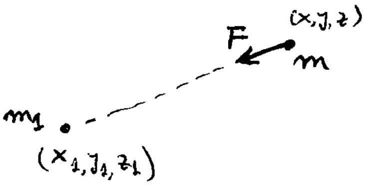
$$\frac{G m m_1}{r^2}, \qquad G = \text{constant de gravitació universal}$$

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{distància entre}\\ \text{els 2 punts}\end{array}\right)$$

En forma vectorial, la força que la massa m_1 exerceix sobre la massa m és:

$$F = -\frac{G m m_1}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{r} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$$
$$r = \|\vec{r}\|$$

(notem que $\|F\| = \dfrac{G m m_1}{r^2}$)



Fixant la massa m_1 en el punt (x_1,y_1,z_1), podem veure la força exercida sobre una partícula de massa unitat $m=1$, situada en qualsevol punt (x,y,z), com un camp vectorial:

$$F(x,y,z) = -\frac{G m_1}{r^3}\vec{r} = -\frac{G m_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}(x-x_1, y-y_1, z-z_1),$$

el camp gravitatori creat per la massa m_1 situada en (x_1,y_1,z_1).

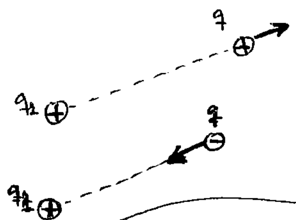
De manera anàloga, segons la llei de Coulomb, una càrrega elèctrica puntual q_1 (estàtica), situada en el punt (x_1,y_1,z_1) determina un camp elèctric:

$$E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$$

ε_0 = permitivitat en el buit.

Així, la força exercida per la càrrega q_1 sobre una altra càrrega q situada en el punt (x,y,z), és $\quad q\cdot E(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q q_1}{r^3}\vec{r}$.

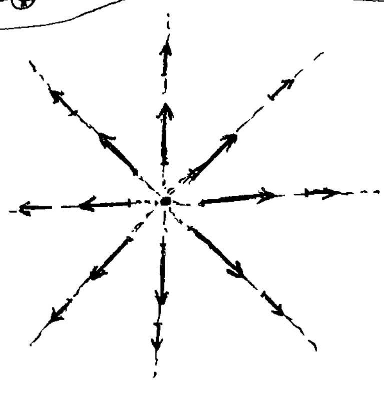
Aquesta força és repulsora si q, q_1 tenen el mateix signe,
i atractora si q, q_1 tenen diferent signe
(en el cas gravitatori sempre és atractora)



Sovint, per simplificar suposarem constants $=1$, i que el punt (x_1,y_1,z_1) és l'origen. Així, el camp gravitatori / elèctric creat per 1 partícula és de la forma

$$F = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

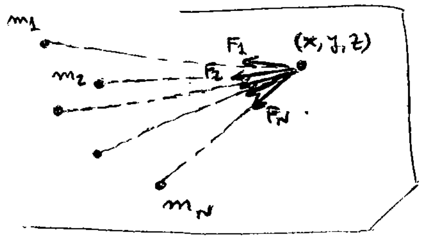
Les línies de flux són rectes per l'origen
(ortogonals a les superfícies de nivell del potencial $V = -\frac{1}{r}$, que són esferes concèntriques $r = \text{const}$.)



* <u>camps gravitatori / elèctric creat per N partícules.</u>

Donades N masses $m_1, \dots, m_N$ situades en els punts $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ respectivament, el camp gravitatori que creen (força exercida sobre una massa ~~unitària~~ situada en un punt (x,y,z)), ve donat per:

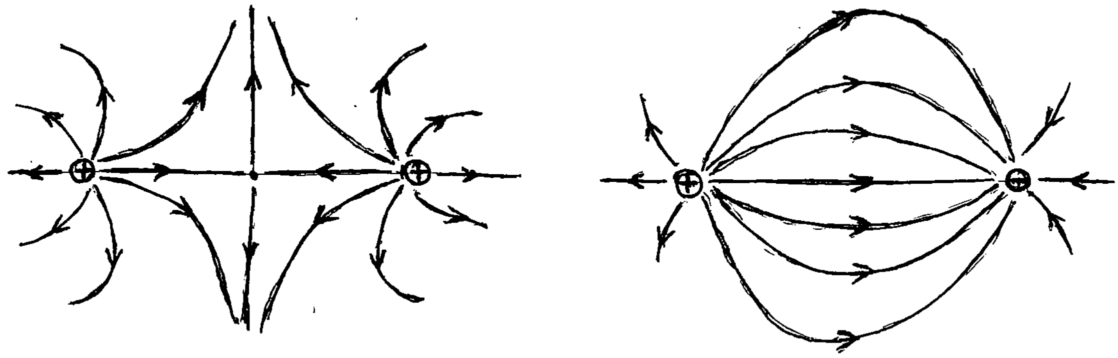
$$F(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} F_k = -G \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{r}_k}{r_k^3} \qquad \left[\begin{array}{l} \vec{r}_k = (x - x_k, y - y_k, z - z_k) \\ r_k = \|\vec{r}_k\| \quad , \quad k = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$



(principi de superposició o additivitat: cal sumar les forces exercides per cadascuna de les masses $m_1, \dots, m_N$).

Anàlogament, tenim el camp elèctric creat per N càrregues puntuals $q_1, \dots, q_N$ (les quals poden tenir diferents signes).

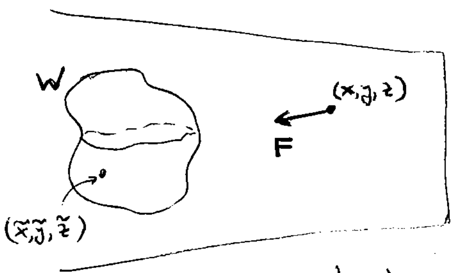
En el cas del camp elèctric generat per 2 càrregues iguals, del mateix signe ($q_1 = q_2$) o de signes diferents ($q_1 = -q_2$), les línies de flux són:



* <u>camp gravitatori / elèctric creat per una distribució de massa / càrrega</u>

Considerant ara un sòlid $W \subset \mathbb{R}^3$ amb densitat de massa $\rho : W \to \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, el camp gravitatori creat per aquest sòlid ve donat per:

$$F(x,y,z) = -\int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \,, \quad \text{essent} \quad \left| \begin{array}{l} \rho = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ \vec{r} = (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}, z - \tilde{z}) \\ r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2 + (z-\tilde{z})^2} \end{array} \right\} \text{per a } (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in W.$$



(hem posat $G = 1$ per simplificar).

En components, tenim $F = (P, Q, R)$,

amb

$$\left. \begin{array}{l} P(x,y,z) = -\displaystyle\int_W \frac{\rho(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \cdot (x - \tilde{x})}{\left((x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2 + (z-\tilde{z})^2\right)^{3/2}} \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} \,, \\ \text{i anàlogament amb } Q(x,y,z) \text{ i } R(x,y,z). \end{array} \right] \quad (*)$$

Nota. Té sentit considerar la força gravitatòria exercida per W sobre un punt (x,y,z) del propi sòlid W. En aquest cas, les fórmules $(*)$ ens dóna una integral impròpia, però passant a coordenades esfèriques

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + s\cos\varphi\cos\theta \\ \tilde{y} = y + s\cos\varphi\sin\theta \\ \tilde{z} = z + s\sin\theta \end{cases} \qquad (s,\theta,\varphi) \longmapsto (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$$

(centrades al punt donat (x,y,z)),

obtenim:

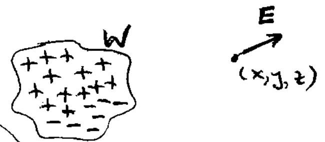
$$P(x,y,z) = +\int_{W^*} \frac{\rho \cdot s\cos\varphi\cdot\cos\theta}{s^3}\cdot \underbrace{s^2\cos\varphi}_{\text{jacobià}}\, ds\, d\theta\, d\varphi\,,$$

on la integral $\int_0 (\cdots)\,ds$ és convergent (i semblant amb Q i R).

Anàlogament, el camp elèctric creat per una distribució de càrrega $e : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ve donat per

$$E(x,y,z) = \int_W \frac{e\vec{r}}{r^3}\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z}\,, \quad \text{amb} \quad \begin{cases} e = e(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \\ \vec{r} = (x-\tilde{x},\, y-\tilde{y},\, z-\tilde{z}) \\ r = \|\vec{r}\| \end{cases}$$

En aquest cas, la funció densitat $e : W \to \mathbb{R}$ pot prendre valors positius i/o negatius.

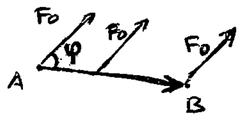


També podem considerar el camp gravitatori / elèctric creat per una distribució de massa / càrrega sobre una corba o una superfície de $\mathbb{R}^3$. Caldria considerar integrals anàlogues a $(*)$, sobre la corba o superfície.

Integral de línia o circulació (d'un camp vectorial al llarg d'una corba)

- La noció d'integral de línia o circulació correspon a la del treball efectuat per un camp de forces sobre una partícula que es mou al llarg d'una trajectòria.

 - Cas simple: una força constant F_0, que actua sobre una partícula que es mou sobre el segment del punt A fins al punt B. (el moviment de la partícula pot ser degut a la suma d'aquesta i altres forces)

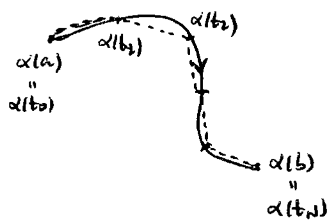


$$\text{Treball} = \|F_0\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos\varphi = \langle F_0, \overrightarrow{AB} \rangle$$

 - si $\cos\varphi > 0 \longrightarrow$ força F_0 favorable al moviment.
 - si $\cos\varphi < 0 \longrightarrow$ força F_0 contrària al moviment.

 - En general, considerem un camp de forces $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, i una partícula que es mou sobre una trajectòria $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

 Podem aproximar el treball efectuat per F al llarg de la trajectòria α, a partir d'una partició $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$.



$$\text{Treball total} = \sum_{i=1}^{N} [\text{treball de } \alpha(t_{i-1}) \text{ a } \alpha(t_i)] \simeq$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{N} \langle F(\alpha(c_i)), \alpha'(c_i) \rangle \, \Delta t, \quad \text{amb } c_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

[per a cada $i = 1, \dots, N$, aproximem el tram de corba entre $\alpha(t_{i-1})$ i $\alpha(t_i)$ pel segment que uneix aquests dos punts, $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \simeq \alpha'(c_i) \cdot \Delta t$, i suposem $F \simeq$ const. en aquest tram.]

Passant al límit quan $N \to \infty$ ($\Delta t \to 0$), obtenim $\int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt$.

- **Def.**

 (a) Donada $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ trajectòria regular (C^1) i donat $F = (P, Q, R)$ camp vectorial (continu), la circulació o integral de línia de F al llarg de α és:

$$\boxed{\int_\alpha \langle F, dl \rangle = \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt.}$$

 (b) Si α és regular a trossos: $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\displaystyle\int_\alpha \langle F, dl \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{\alpha_i} \langle F, dl \rangle$.

Si la trajectòria és tancada ($\alpha(a) = \alpha(b)$), sovint s'escriu $\oint_\alpha \langle F, dl \rangle$.

Obs.: Estem escrivint $dl = d\vec{l} = \alpha'(t)\,dt$ (vectorial), diferent de l'element de longitud $dl = \|\alpha'(t)\|\,dt$ (escalar).

Una altra notació:

$$\int_\alpha \langle F, dl\rangle = \int_a^b \big(P(\alpha(t))\,x'(t) + Q(\alpha(t))\cdot y'(t) + R(\alpha(t))\cdot z'(t)\big)\,dt =$$

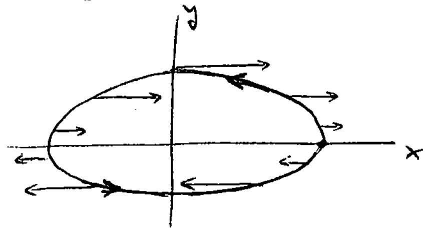
$$= \boxed{\int_\alpha \underbrace{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}}$$

1-forma diferencial associada al camp vect. F, amb $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$, $dz = z'(t)\,dt$.

- En el cas d'un camp de forces, la circulació és el treball. Veurem més endavant la interpretació en el cas del camp de velocitats d'un fluid (en termes del rotacional)

- Exemples

1) Circulació del camp $F(x,y) = (y,0)$ al llarg de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, parametritzada per $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.



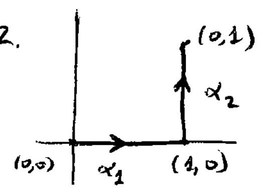
$$\int_\alpha \langle F, dl\rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-ab\sin^2 t)\,dt = \underline{-\pi ab}$$

$F(\alpha(t)) = (b\sin t, 0)$
$\alpha'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

Obs. circulació <0 ja que la força s'oposa al moviment al llarg de l'el·lipse.

2) $$\int_\alpha 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy, \quad \text{essent} \quad \alpha(t) = \begin{cases} (t,0) & 0\le t\le 1 \\ (1,t-1) & 1\le t\le 2. \end{cases}$$



α és regular a trossos, $\int_\alpha = \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2}$.

$$\int_{\alpha_1} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int_0^1 0\,dt + (t^3+1)\cdot 0\,dt = 0$$

$x = t$, $y = 0$
$dx = dt$, $dy = 0\,dt$

(el camp és ortogonal a α_1: $F(t,0) = (0, t^3+1)$)

$$\int_{\alpha_2} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int_1^2 3(t-1)\cdot 0\,dt + 2\,dt = 2$$

$x = 1$, $y = t-1$
$dx = 0\,dt$, $dy = dt$

$$\Rightarrow \int_\alpha = 0 + 2 = \underline{2}$$

- Donada una trajectòria $\alpha(t)$, $a\leq t\leq b$ (suposem regular) i un camp vectorial F, podem reescriure la circulació de F al llarg de α considerant ~~els~~ vector tangent unitari a la trajectòria α:

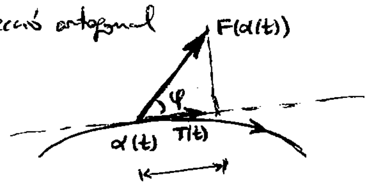
$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Així tenim:

$$\int_\alpha \langle F,dl\rangle=\int_a^b\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle dt=\int_a^b\langle F(\alpha(t)),T(t)\rangle\,\|\alpha'(t)\|\,dt=\boxed{\int_\alpha\langle F,T\rangle\,dl}\quad(*)$$

(integral de trajectòria d'una funció escalar)

Interpretació geomètrica: $\langle F,T\rangle$ és el component tangencial del camp F en cada punt de la trajectòria α (és a dir, la projecció ortogonal sobre la recta tangent).



$\|F(\alpha(t))\|\cdot\cos\varphi=\langle F(\alpha(t)),T(t)\rangle$

Obs: Si F és ortogonal a α en cada punt, llavors $\int_\alpha\langle F,dl\rangle=0$.

- Circulació al llarg d'una corba orientada.

Donada una corba C, ens preguntem si podem escriure $\int_C\langle F,dl\rangle$, és a dir, si la circulació d'un camp vectorial al llarg de C no depèn de la parametrització escollida.

Si $\alpha(t)$, $t\in I$, i $\beta(s)$, $s\in J$, són parametritzacions de C, relacionades per un canvi de paràmetre $h: J\to I$, tenim (suposant α,β regulars):

$$\boxed{\int_\alpha\langle F,dl\rangle}=\int_I\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt\underset{\substack{t=h(s)\\ \beta(s)=\alpha(t)\\ \beta'(s)=\alpha'(t)\cdot h'(s)}}{=}\int_J\left\langle F(\beta(s)),\frac{\beta'(s)}{h'(s)}\right\rangle|h'(s)|\,ds=\boxed{\pm\int_\beta\langle F,dl\rangle}$$

$$\frac{|h'(s)|}{h'(s)}=\begin{cases}1 & \text{si } h'(s)>0\\ -1 & \text{si } h'(s)<0.\end{cases}$$

Recordem que $h'>0$ si α i β tenen la mateixa orientació (o sentit), i $h'<0$ si tenen orientació oposada.

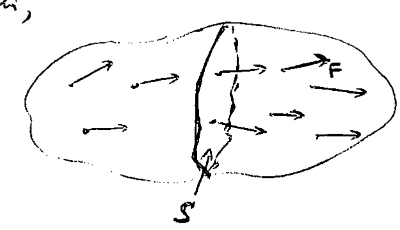
Per tant, la circulació d'un camp F al llarg d'una corba C **no depèn** de la parametrització concreta de la corba, però sí de la seva orientació. Només té sentit escriure $\int_C\langle F,dl\rangle$ si prèviament hem escollit una orientació de la corba C. (sovint una corba orientada s'escriu C^+)

En la notació $(*)$, els vectors tangents unitaris $T_\alpha(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, $T_\beta(s)=\frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}$ compleixen $T_\alpha(t)=\pm T_\beta(s)$ segons si α i β tenen la mateixa orientació o orientació oposada, i llavors:

$$\int_\alpha\langle F,T_\alpha\rangle\,dl=\pm\int_\beta\langle F,T_\beta\rangle\,dl.$$

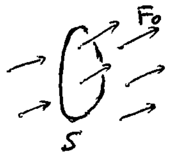
Flux (d'un camp vectorial a través d'una superfície)

- Considerem un fluid en moviment, en una regió de l'espai, i que en cada punt la velocitat ve donada per un camp vectorial $F(x,y,z)$ (camp de velocitats)



Donada una superfície S, el flux de F a través de S serà la quantitat de fluid que la traversa per unitat de temps (p. ex., el cabal en una secció d'un canal)

- Cas simple: S superfície plana, $F(x,y,z) \equiv F_0$ camp constant.

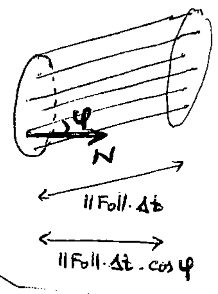


En un temps Δt, la quantitat de fluid que ha traversat S és:

$$A(S)\cdot \|F_0\|\cdot \Delta t \cdot \cos\varphi = A(S)\cdot \langle F_0, N\rangle \cdot \Delta t,$$

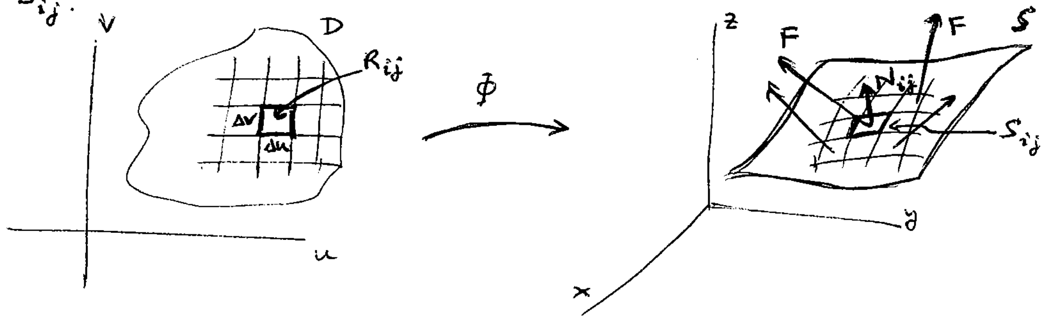
essent N vector unitari, ortogonal a S.

(aquesta quantitat és el volum d'un cilindre S i alçada $\|F_0\|\cdot\Delta t\cdot\cos\varphi$,



Llavors, el flux o quantitat de fluid per unitat de temps és: $A(S)\cdot\langle F_0, N\rangle$

- En general, considerem una superfície S qualsevol, parametritzada per $\Phi: D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, i un camp de velocitats $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.
Per aproximar el flux de F a través de S, considerem una partició de D en rectangles R_{ij}, i aproximem els trossos de superfície $S_{ij} = \Phi(R_{ij})$ per paral·lelograms (cadascun contingut en un pla), i el camp F per constant sobre cada tros S_{ij}.



$$\text{Flux total} = \sum_{i,j}[\text{flux a través de } S_{ij}] \simeq \sum_{i,j} A(S_{ij})\langle F(\Phi(c_{ij})), N_{ij}\rangle \simeq$$

$$\simeq \sum_{i,j}\langle F(\Phi(c_{ij})), N_{ij}\rangle \, \|\Phi_u(c_{ij})\wedge\Phi_v(c_{ij})\|\cdot\Delta u\,\Delta v,$$

[aprox. de l'àrea d'un tros de superfície en una partició]

essent $c_{ij}\in R_{ij}$, i N_{ij} vector unitari, normal a S_{ij} en un punt. Passant al límit, obtenim una integral.

Escrivint $N(u,v) = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$, vector normal unitari en cada punt $\Phi(u,v) \in S$, tindrem:

$$\int_D \langle F(\Phi(u,v)), N(u,v) \rangle \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du\, dv = \int_D \langle F(\Phi(u,v)), \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle \, du\, dv. \quad (*)$$

- Def.

(a) Si S superfície regular, amb una parametrització $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donat un camp vectorial $F = (P, Q, R)$, el **flux** de F a través de S, o integral de superfície de F sobre S (per la parametrització Φ):

$$\boxed{\int_\Phi \langle F, dS \rangle = \int_D \langle F(\Phi(u,v)), \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle \, du\, dv}$$

(b) Si S és regular a trossos, $S_1, \dots, S_r$, amb parametritzacions $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, el flux ve donat per la suma: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \int_{\Phi_i} \langle F, dS \rangle$.

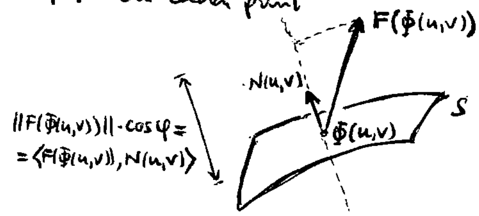
Obs.: Hem escrit $dS = d\vec{S} = \Phi_u \wedge \Phi_v \cdot du\, dv$ (vectorial), diferent de l'element d'àrea $dS = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du\, dv$ (escalar).

- Com ja hem vist a $(*)$, també podem escriure el flux de F a través de S en termes del vector normal unitari $N(u,v) = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$. (suposem S regular)

Llavors tenim:

$$\int_\Phi \langle F, dS \rangle = \boxed{\int_\Phi \langle F, N \rangle \, dS},$$

i la funció escalar $\langle F, N \rangle$ és el component normal del camp F en cada punt de la superfície S.



Obs.: Si F és tangent a S en cada punt, llavors $\displaystyle\int_\Phi \langle F, dS \rangle = 0$.

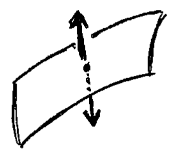
- Una altra notació per al flux de $F = (P, Q, R)$ a través de S:

$$\int_\Phi \underbrace{P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy}_{\text{una 2-forma diferencial}}$$

- <u>Orientació d'una superfície, flux a través d'una superfície orientada.</u>

* Com en el cas de la circulació al llarg d'una corba, el flux d'un camp vectorial $\mathbf{F}$ a través d'una superfície S no depèn de la parametrització concreta, però sí de la seva <u>orientació</u>.

Notem que, en cada punt de S, segons la parametrització escollida **tenim 2 possibles vectors normals unitaris.**



Si S és superfície regular, **donades dues** parametritzacions regulars Φ i Ψ de S, **per continuïtat** només podem tenir una d'aquestes **2** situacions:

- els vectors normals unitaris coincideixen en tot punt: $N_\Phi = N_\Psi$; llavors direm que Φ i Ψ tenen la <u>mateixa orientació</u>.
- els vectors normals unitaris són oposats en tot punt: $N_\Phi = -N_\Psi$; llavors direm que Φ i Ψ tenen <u>orientacions oposades</u>.

(Si relacionem Φ i Ψ per un canvi de paràmetre, $\Psi = \Phi \circ h$, tenim $\Psi_w \wedge \Psi_t = Jh \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v$. Llavors, el signe del jacobià Jh ens diu si Φ i Ψ tenen la mateixa orientació o oposades.

* Recordant que $\int_\Phi \langle F, dS\rangle = \int_\Phi \langle F, N_\Phi\rangle dS$, prenent com a referència en cada punt el vector N_Φ, el signe de $\langle F, N_\Phi\rangle$ ens diu si el vector $\mathbf{F}$ apunta cap al mateix costat de S que N_Φ, o cap a **l'altre costat**. Però aquest signe pot canviar si prenem com a referència N_Ψ. Per tant, tindrem:

$$\int_\Phi \langle F, dS\rangle = \pm \int_\Psi \langle F, dS\rangle,$$ segons si Φ i Ψ tenen la mateixa orientació, o orientacions oposades.

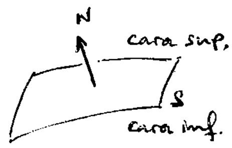
* <u>Def.</u> Sigui S superfície <u>regular</u>.

(a) Una <u>orientació</u> de la superfície S és una tria d'un vector normal unitari $N(p)$ per a cada punt $p \in S$, de manera que $\mathbf{N}: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sigui contínua (sovint, una superfície orientada s'escriu S^+).

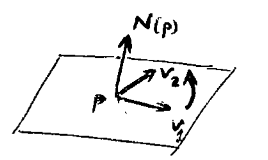
(b) La superfície S és <u>orientable</u> si admet alguna orientació definida a <u>tota</u> la sup. S.

Aleshores:

- **Podem** parlar de "<u>cara superior</u>" i "<u>cara inferior</u>" de la superfície S.



- **Tenim** determinat un <u>sentit de gir positiu</u> sobre el pla tangent en cada punt $p \in S$: donats $v_1, v_2 \in T_pS$ tals que $v_1 \wedge v_2 = N(p)$, el sentit de gir **positiu és de v_1 cap a v_2**



(c) Si S superfície orientada per N, donat un camp vectorial $\mathbf{F}$ escriurem

$$\int_S \langle F, dS\rangle = \int_\Phi \langle F, dS\rangle,$$ essent Φ una parametrització de S tal que $N_\Phi = N$.

[és a dir, si l'orientació de Φ és la que hem escollit per a S]

$$\left(\text{o bé } \int_S \langle F, dS\rangle = -\int_\Phi \langle F, dS\rangle \quad \text{si } N_\Phi = -N \right)$$

* Exemples (orientacions de superfícies)

1) Gràfica d'una funció: $S = \{ z = f(x,y) \,,\ (x,y) \in D \}$

Parametrització $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y)) \longrightarrow \Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1) \Longrightarrow \mathbf{N}_\Phi = \dfrac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$.

El vector normal unitari N_Φ ens dóna **una orientació** de tota la superfície S $\Rightarrow$ és orientable.

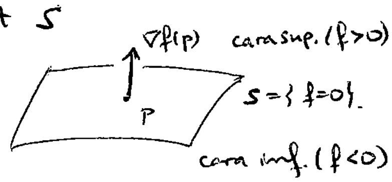
2) En general, si S és superfície parametritzada per $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in D$, suposant Φ injectiva a tot D (incloent la frontera ∂D), serà orientable, amb $N_\Phi = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\| \Phi_u \wedge \Phi_v \|}$.

3) Superfície definida implícitament: $S = \{ f(x,y,z) = 0 \}$, suposant que $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ $\forall (x,y,z) \in S$ (és a dir, en tot punt de S podem aplicar el teo. f. impl.)

Sabem que $\nabla f(x,y,z)$ és un vector normal a S en cada punt $(x,y,z) \in S$.

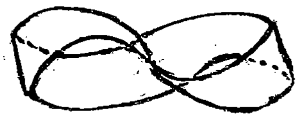
Llavors, $\mathbf{N} = \dfrac{\nabla f(x,y,z)}{\| \nabla f(x,y,z) \|}$ **és un vector normal unitari** a tot S

$\Rightarrow$ és orientable



P. ex., $\begin{cases} S = \{ x^2+y^2 = R^2 \} \text{ (cilindre)} \longrightarrow \mathbf{N} = \frac{1}{R}(x,y,0) \\ S = \{ x^2+y^2+z^2 = R^2 \} \text{ (esfera)} \longrightarrow \mathbf{N} = \frac{1}{R}(x,y,z). \end{cases}$

4) Cinta de **Möbius**



$\longrightarrow$ exemple de superfície no orientable.

Parametrització:
$$\Phi(\theta, v) = \left(\left(R + rv \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\theta,\ \left(R + rv\cos\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta,\ rv \sin\frac{\theta}{2} \right),$$
$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad -1 \le v \le 1. \qquad (r < R)$$

no injectiva a ∂D; tenim $\Phi(0,0) = \Phi(2\pi, 0)$

però $N_\Phi(0,0) = (0,0,-1)$, $\mathbf{N}_\Phi(2\pi,0) = (0,0,1)$.

- <u>Exemples de càlcul de flux</u>

1) Flux del camp $F(x,y,z)=(0,1,0)$ a través de l'esfera $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$, orientada per la normal exterior.

Parametritzem S: $\Phi(\theta,\varphi)=(\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ \cos\varphi\cdot\sin\theta,\ \sin\varphi)=(x,y,z)$, $\underbrace{0\le\theta\le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}_{D}$

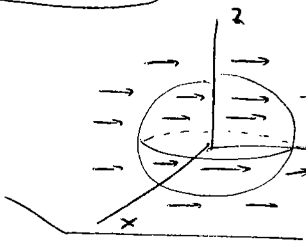
$\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi=\underset{\underset{0}{\vee}}{\cos\varphi}\cdot(x,y,z)\longrightarrow$ <u>normal exterior</u>.

$$\int_S\langle F,dS\rangle=+\int_\Phi\langle F,dS\rangle=\int_D\langle F\circ\Phi,\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\rangle\,d\theta\,d\varphi=\int_D\cos\varphi\cdot y\,d\theta\,d\varphi=$$

$F(\Phi(\theta,\varphi))=(0,1,0)$
$\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi=\cos\varphi\cdot(x,y,z)$

$$=\int_D\cos^2\varphi\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi=\underline{\underline{0}}.$$

(surt tant de fluid com n'entra)

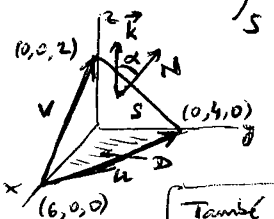


2) Flux del camp $F=(9,-6,3)$ (constant) a través de la superfície del pla $2x+3y+6z=12$ contingude en el 1er octant, segons la direcció del vector normal $(2,3,6)$.

$$\int_S\langle F,dS\rangle=\int_S\langle F,N\rangle\,dS=\frac{18}{7}A(S)=\frac{18}{7}\frac{A(D)}{\cos\alpha}=\frac{18}{7}\cdot\frac{12}{6/7}=\underline{\underline{36}}.$$

$N=\frac{1}{7}(2,3,6)$
$\langle F,N\rangle=\frac{18}{7}$

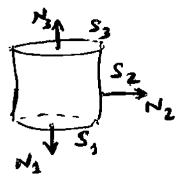
D = projecció de S sobre el pla xy,
$A(D)=\frac{6\cdot 4}{2}=12.$
α = angle de N amb la direcció vertical,
$\cos\alpha=\langle N,\vec{k}\rangle=\frac{6}{7}$



També podem usar:
$A(S)=\frac{1}{2}\|u\wedge v\|=\frac{1}{2}\|(-6,4,0)\wedge(-6,0,2)\|=$
$=\frac{1}{2}\|(8,12,24)\|=\mathbf{14}$

3) $W=\{x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 5\}$ (cilindre), calculem el flux sortint del camp $F=(xz,x,-3y^2z)$ per la superfície $S=\partial W$.

$S=S_1\cup S_2\cup S_3$, sup. regular a trossos, $\int_S\langle F,dS\rangle=\int_{S_1}+\int_{S_2}+\int_{S_3}$.



* $S_1=\{z=0,\ x^2+y^2\le 1\}$, vector normal $N_1=(0,0,-1)$

$\int_{S_1}\langle F,dS\rangle=\int_{S_1}\langle F,N_1\rangle dS=0$, ja que $F(x,y,0)=(0,x,0)\perp N_1\ \forall(x,y)$.
(el camp F és tangent a S_1)

* $S_2=\{x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 5\}$, parametritzem: $\Phi(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,z)$, $\underbrace{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 5}_{D_2}$

$\Phi_\theta\wedge\Phi_z=N_2=(\cos\theta,\sin\theta,0)$, <u>normal exterior</u>.

$$\int_{S_2}\langle F,dS\rangle=+\int_\Phi\langle F,dS\rangle=\int_{D_2}\langle F\circ\Phi,\Phi_\theta\wedge\Phi_z\rangle\,d\theta\,dz=\int_{D_2}(z\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\,dz=\frac{25}{2}\pi$$

$F(\Phi(\theta,z))=(z\cos\theta,\cos\theta,-3z\sin^2\theta)$

* $S_3=\{z=5,\ x^2+y^2\le 1\}$, $N_3=(0,0,1)$

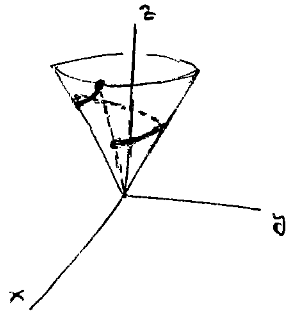
$$\int_{S_3}\langle F,dS\rangle=\int_{S_3}\langle F,N_3\rangle dS=\int_{D_3}(-15y^2)\,dx\,dy=-15\int_0^1 r^3dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=-\frac{15}{4}\pi.$$

$F(x,y,5)=(5x,x,-15y^2)$ (polars)

Sumant,
$$\int_S\langle F,dS\rangle=0+\frac{25}{2}\pi-\frac{15}{4}\pi=\underline{\underline{\frac{35}{4}\pi}}$$

(2.5) Circulació d'un camp vectorial a través d'una corba.

33 Determineu el treball del camp de forces $F=(x,y,z)$, quan el punt material es desplaça a través de la primera espira de l'hèlice cònica $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, des del punt $A=(a,0,a)$ fins al punt $B=(ae^{2\pi},0,ae^{2\pi})$.



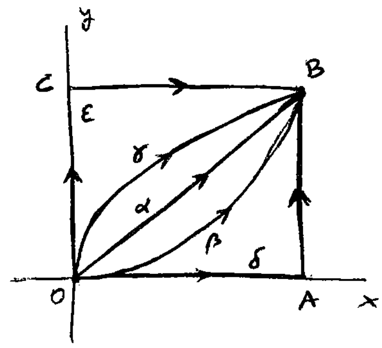
$\alpha(t)=(ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t)$, $0\le t\le 2\pi$.

$A=\alpha(0)$, $B=\alpha(2\pi)$ $\longrightarrow$ trajectòria continguda al con $x^2+y^2=z^2$

$F(\alpha(t))=(ae^t\cos t,\ ae^t\sin t,\ ae^t)$.

$$\int_\alpha \langle F, dl\rangle = \int_0^{2\pi}\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi} 2a^2e^{2t}\,dt = a^2e^{2t}\Big]_0^{2\pi} = \underline{a^2(e^{4\pi}-1)}$$

35 Calculeu la integral curvilínia $\int_O^B \langle F,T\rangle\,dl$, si $F=(y^2,x^2)$, essent $O=(0,0)$, $B=(1,1)$, respecte a les línies següents:



(a) segment de la recta OB.

$\alpha(t)=(t,t)$, $0\le t\le 1$.

$\alpha'(t)=(1,1)$, $F(\alpha(t))=(t^2,t^2)$

$$\int_\alpha \langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt = \underline{\tfrac{2}{3}}$$

(b) arc de la paràbola $x^2=y$

$\beta(x)=(x,x^2)$, $0\le x\le 1$ $\rightsquigarrow$ $\beta'(x)=(1,2x)$, $F(\beta(x))=(x^4,x^2)$

$$\int_\beta \langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\beta(x)),\beta'(x)\rangle\,dx = \int_0^1 (x^4+2x^3)\,dx = \underline{\tfrac{7}{10}}$$

(c) arc de la paràbola $y^2=x$

$\gamma(y)=(y^2,y)$, $0\le y\le 1$ $\rightsquigarrow$ $\gamma'(x)=(2y,1)$, $F(\gamma(y))=(y^2,y^4)$

$$\int_\gamma \langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\gamma(y)),\gamma'(y)\rangle\,dy = \int_0^1 (2y^3+y^4)\,dy = \underline{\tfrac{7}{10}}$$

(d) trencada OAB, on $A=(1,0)$.

$$\delta(t)=\begin{cases}(t,0), & 0\le t\le 1\\ (1,t-1), & 1\le t\le 2\end{cases} \longrightarrow \delta'(t)=\begin{cases}(1,0)\\(0,1)\end{cases},\quad F(\delta(t))=\begin{cases}(0,t^2)\\((t-1)^2,1)\end{cases}$$

$$\int_\delta \langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\delta(t)),\delta'(t)\rangle\,dt + \int_1^2\langle F(\delta(t)),\delta'(t)\rangle\,dt = \int_0^1 0\,dt+\int_1^2 1\,dt = \underline{1}$$

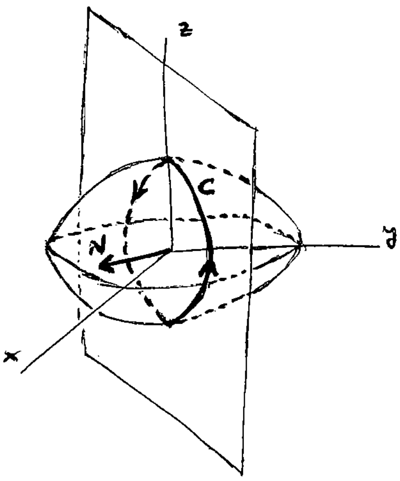
(e) trencada OCB, on $C=(0,1)$.

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}(0,t), & 0\le t\le 1\\ (t-1,1), & 1\le t\le 2\end{cases} \longrightarrow \varepsilon'(t)=\begin{cases}(0,1)\\(1,0)\end{cases},\quad F(\varepsilon(t))=\begin{cases}(t^2,0)\\(1,(t-1)^2)\end{cases}$$

$$\int_\varepsilon \langle F,T\rangle\,dl = \int_0^1\langle F(\varepsilon(t)),\varepsilon'(t)\rangle\,dt + \int_1^2\langle F(\varepsilon(t)),\varepsilon'(t)\rangle\,dt = \int_0^1 0\,dt+\int_1^2 1\,dt = \underline{1}$$

38 Calculem la circulació del vector $F=(y,-z,x)$ a través de l'el·lipse $\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2$, $y=x$ orientada positivament prenent com a vector normal positiu del pla $y=x$ el $(1,-1,0)$.

$$C=\Big\{(x,y,z):\ \underbrace{\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2}_{\text{el·lipsoide}},\ \underbrace{y=x}_{\text{pla}}\Big\}\ \text{el·lipse}$$



Sobre C, com que $y=x$ tenim $x^2+z^2=a^2$.

Llavors, podem parametritzar C per

$\alpha(t)=(a\cos t,\ a\cos t,\ a\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Calculem:

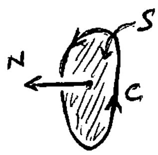
$$\alpha'(t)=(-a\sin t,\ -a\sin t,\ a\cos t)$$

$$F(\alpha(t))=(a\cos t,\ -a\sin t,\ a\cos t).$$

$$\int_\alpha \langle F, dl\rangle=\int_0^{2\pi}\langle F(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle\,dt=\int_0^{2\pi}a^2(1-\sin t\cdot\cos t)\,dt=a^2\Big[t-\frac{\sin^2 t}{2}\Big]_0^{2\pi}=\underline{\underline{2\pi a^2}}.$$

* Hem de comprovar si l'orientació de la parametrització α de C és compatible amb l'orientació del pla $y=x$, donada pel vector $N=(1,-1,0)$.
(Si no ho fos, canviaríem el signe).

Considerem el tros de pla que queda a l'interior de l'el·lipsoide:



$$S=\Big\{y=x,\ \frac{x^2+y^2}{2}+z^2\le a^2\Big\}=\{f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)\le 0\},$$

essent $f(x,y,z)=x-y$, $g(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{2}+z^2-a^2$.

La corba C és la vora de S.

Tenim $\nabla f=(1,-1,0)=N$, $\nabla g=(x,y,2z)$ $\Rightarrow$ l'orientació de C compatible amb S és la que ve donada pel vector

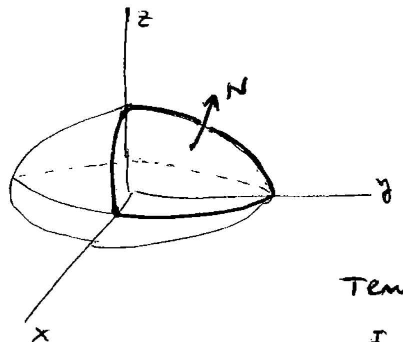
$$\nabla f\wedge\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ x & y & 2z\end{vmatrix}=(-2z,-2z,y+x),$$

que té la mateixa direcció i sentit que $\alpha'(t)$, en els punts $(x,y,z)=\alpha(t)$.

Per tant, $\displaystyle\int_{C^+}\langle F,dl\rangle=\int_\alpha\langle F,dl\rangle=\underline{\underline{2\pi a^2}}.$

(2.6) Flux d'un camp vectorial a través d'una superfície

(41) Trobeu el flux del vector $F=(x,y,z)$ a través d'una part de la superfície de l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ situada en el primer octant, orientada per la normal exterior.



La superfície S ve parametritzada per

$$\Phi(\theta,\varphi)=(a\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ b\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ c\cdot\sin\varphi),$$

$$(\theta,\varphi)\in D=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\quad(1^{er}\text{ octant})$$

Tenim (probl. 32):

$$\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi=(bc\cos^2\varphi\cos\theta,\ ac\cos^2\varphi\cdot\sin\theta,\ ab\cos\varphi\cdot\sin\varphi)=$$

$$=\underbrace{\cos\varphi}_{\geq 0}\cdot\left(\frac{bc}{a}x,\ \frac{ac}{b}y,\ \frac{ab}{c}z\right)$$

$\Rightarrow$ el vector normal unitari $N_\Phi=\dfrac{\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi}{\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|}$ correspon a la normal exterior (els 3 components >0 en el 1^{er} octant).

Calculem:

$$\int_S\langle F,dS\rangle=+\int_\Phi\langle F,dS\rangle=\int_D\langle F\circ\Phi,\ \Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\rangle\,d\theta\,d\varphi=\int_D abc\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=abc\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=abc\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=\boxed{\frac{\pi abc}{2}}$$

$F(\Phi(\theta,\varphi))=\Phi(\theta,\varphi)=(x,y,z)$

$\langle F(\Phi),\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\rangle=\cos\varphi\cdot\left(\frac{bc}{a}x^2+\frac{ac}{b}y^2+\frac{ab}{c}z^2\right)=$

$=abc\cos\varphi\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=abc\cos\varphi$

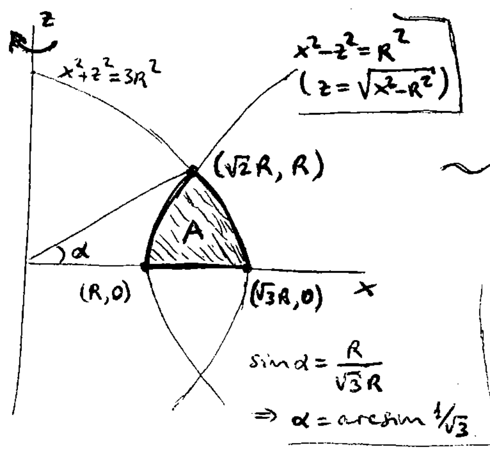
(42) Trobeu el flux del vector $F=(x^2,-y^2,z^2)$ a través de tota la superfície del cos $x^2+y^2+z^2\leq 3R^2$, $0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2-R^2}$ orientada per la normal exterior.

Observem: $x^2+y^2+z^2=3R^2$ esfera

$z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}\rightsquigarrow x^2+y^2-z^2=R^2$, hiperboloide d'una fulla

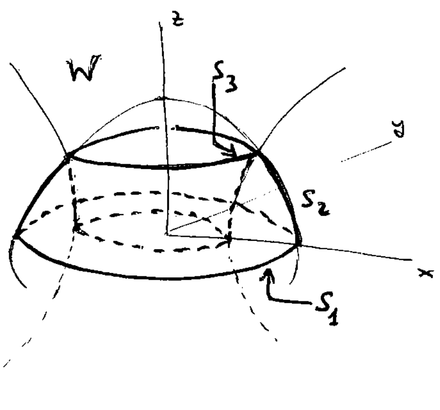
El cos $W=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leq 3R^2,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2-R^2}\}$ és un cos de revolució, obtingut en girar respecte l'eix z el conjunt:

$$A=\{(x,z):\ x^2+z^2\leq 3R^2,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2-R^2},\ x\geq 0\}$$



$\sin\alpha=\frac{R}{\sqrt3 R}$

$\Rightarrow\alpha=\arcsin 1/\sqrt3$



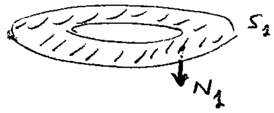
La frontera $S=\partial W$ és una superfície regular a trossos: $S=S_1\cup S_2\cup S_3$.

Llavors calculem el flux de $\mathbf{F}$ a través de cada tros i sumarem:

$$\int_S \langle F, dS\rangle = \int_{S_1}\langle F, dS\rangle + \int_{S_2}\langle F, dS\rangle + \int_{S_3}\langle F, dS\rangle,$$ amb cada S_i orientat per la normal exterior al cos W.

* $S_1=\{(x,y,z):\ z=0,\ R^2\le x^2+y^2\le 3R^2\}$ (corona circular en el pla $z=0$)

Vector normal: $N_1(x,y)=(0,0,-1)$



Llavors,
$$\int_{S_1}\langle F, dS\rangle = \int_{S_1}\langle F, N_1\rangle\, dS = 0$$

$\langle F(x,y,0), N_1\rangle = \langle (x^2,-y^2,0),(0,0,-1)\rangle = 0\quad \forall (x,y)$

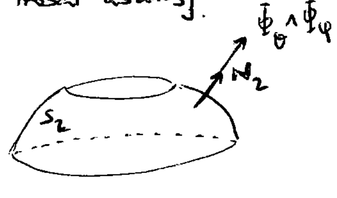
(F és tangent a la superfície S_1)

* $S_2=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=3R^2,\ 0\le z\le R\} = \Phi(D_2)$ (un tros d'esfera),

essent $\Phi(\theta,\varphi)=(\sqrt3 R\cos\varphi\cdot\cos\theta,\ \sqrt3 R\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ \sqrt3 R\sin\varphi)$ (coord. esfèriques)

$$D_2=\{(\theta,\varphi):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le \underbrace{\arcsin\tfrac{1}{\sqrt3}}_{\text{[l'angle d trobat abans]}}\}$$

Notem que el vector normal



$$\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi = 3R^2(\cos^2\varphi\cdot\cos\theta,\ \cos^2\varphi\cdot\sin\theta,\ \cos\varphi\cdot\sin\varphi) = \sqrt3 R\underbrace{\cos\varphi}_{\geq 0}\cdot(x,y,z)$$

s'orienta cap a l'exterior del cos W

Per tant,
$$\int_{S_2}\langle F, dS\rangle = +\int_{D_2}\langle F\circ\Phi,\ \Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\rangle\, d\theta\, d\varphi = \int_{D_2} 9R^4\left(\cos^4\varphi\,(\cos^3\theta-\sin^3\theta)+\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi\right)d\theta\, d\varphi =$$

$F(\Phi(\theta,\varphi)) = 3R^2(\cos^2\varphi\cdot\cos^2\theta,\ -\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta,\ \sin^2\varphi)$
i calculem el producte escalar.

$$= 0 + 9R^4\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\arcsin 1/\sqrt3}\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi\, d\varphi = 18\pi R^4\cdot\left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\arcsin 1/\sqrt3} = 18\pi R^4\cdot\frac{(1/\sqrt3)^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2},$$

on hem usat que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta = 0.$ (*)

* $S_3=\{(x,y,z):\ x^2+y^2-z^2=R^2,\ 0\le z\le R\}$ (un tros d'hiperboloide).

Notem que S_3 és la superfície de revolució obtinguda de la corba
$$\alpha(z)=(f(z),0,g(z))=(\sqrt{R^2+z^2},\ 0,\ z),\quad 0\le z\le R$$

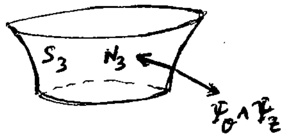
$\Rightarrow$ podem parametritzar $S_3=\Psi(D_3)$,

$$\Psi(\theta,z)=(f(z)\cos\theta,\ f(z)\sin\theta,\ g(z)) = (\sqrt{R^2+z^2}\cdot\cos\theta,\ \sqrt{R^2+z^2}\cdot\sin\theta,\ z)$$
$$D_3=\{(\theta,z):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le R\}$$

El vector normal $\Psi_\theta \wedge \Psi_z = \left(f(z)\, g'(z) \cos\theta,\ f(z)\, g'(z) \sin\theta, -f(z)\, f'(z) \right) =$

$= \left(\sqrt{R^2+z^2} \cos\theta,\ \sqrt{R^2+z^2} \sin\theta, -z \right),$

el qual s'orienta cap a l'interior del cos W (la part externa de l'hiperboloide)



Per tant,

$$\int_{S_3} \langle F, dS \rangle = -\int_{D_3} \langle F \circ \Psi, \Psi_\theta \wedge \Psi_z \rangle \, d\theta\, dz =$$

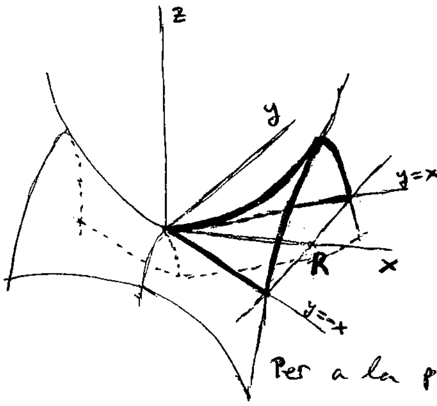
$F(\Psi(\theta, z)) = \left((R^2+z^2)\cos^2\theta, -(R^2+z^2)\sin^2\theta, z^2 \right)$ i calculem el producte escalar.

$$= -\int_{D_3} \left((R^2+z^2)^{3/2} (\cos^3\theta - \sin^3\theta) - z^3 \right) d\theta\, dz = 0 + 2\pi \int_0^R z^3\, dz = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2},$$

on hem tornat a usar (✱).

El flux total: $\displaystyle\int_S \langle F, dS \rangle = 0 + \frac{\pi R^4}{2} + \frac{\pi R^4}{2} = \pi R^4.$

(48) Trobeu el flux del vector $F = (x, y, z)$ a través d'una part de la superfície $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, tallada pels plans $x = R$, $z = 0$, $x = 0$ i orientada segons la direcció del vector $(0,0,1)$ en el punt $(0,0,0)$.



$z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$ paraboloide hiperbòlic.

Notem que $z \geq 0 \iff x^2 \geq y^2 \iff -x \leq y \leq x$ (si $x \geq 0$)

Llavors la superfície S és la gràfica de $f(x,y) = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$ sobre el domini $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq R,\ -x \leq y \leq x\}$.

Per a la parametrització $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$, el vector normal ve donat per $\Phi_x \wedge \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1) = \left(-\frac{2H}{R^2} x,\ \frac{2H}{R^2} y, 1 \right)$, que coincideix amb $N = (0,0,1)$ a l'origen.

Llavors,

$$\int_S \langle F, dS \rangle = +\int_D \langle F \circ \Phi, \Phi_x \wedge \Phi_y \rangle \, dx\, dy = \int_D \frac{H}{R^2}(y^2 - x^2)\, dx\, dy =$$

$F(\Phi(x,y)) = \Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$$= \frac{H}{R^2} \int_0^R dx \int_{-x}^{x} (y^2 - x^2)\, dy = \frac{H}{R^2} \int_0^R dx \cdot \left[\frac{y^3}{3} - x^2 y \right]_{y=-x}^{y=x} = \frac{H}{R^2} \int_0^R \left(-\frac{4}{3} x^3 \right) dx = -\frac{H}{R^2} \cdot \frac{R^4}{3} = -\frac{HR^2}{3}.$$