Integrals definides i impròpies: problemes resolts (Càlcul I)

Pere Gutiérrez Maig 2020

Problema 12: *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua, hi ha un punt $c \in [a, b]$ tal que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$ (teorema del valor mitjà per a integrals). *Determineu c per a les integrals següents.*

(a) $\displaystyle\int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x$

Tenim $f(x) = x^3$, contínua. Hem de buscar $c \in [0, 3]$ tal que $\displaystyle\int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x = c^3(3-0)$, és a dir, resoldre l'equació $\dfrac{81}{4} = 3c^3$. Obtenim el valor $\boxed{c = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}}$, que pertany a l'interval $[0, 3]$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \left(x - 2\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$

Procedim anàlogament. Primer calculem $\displaystyle\int_0^2 \left(x - 2\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 2\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{3}\sqrt{2}$ (hem usat que $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$). Igualem aquest resultat amb $2(c - 2\sqrt{c})$. Escrivint $d = \sqrt{c}$, hem de resoldre l'equació $2d^2 - 4d + \left(\dfrac{8}{3}\sqrt{2} - 2\right) = 0$. Obtenim $d = 1 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{8 - \dfrac{16}{3}\sqrt{2}}$. Calculant $c = d^2$ obtenim els valors $\boxed{c_1 \approx 0.437974}$, $\boxed{c_2 \approx 1.790790}$, que pertanyen ambdós a l'interval $[0, 2]$.

Problema 13: *La mitjana d'una funció integrable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és la quantitat* $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. *Trobeu la mitjana de les funcions següents, als intervals indicats.*

Nota: Si f és una funció contínua, la mitjana $\overline{f}$ coincideix amb el valor $f(c)$ del problema 12, és a dir, hi ha un punt c (no necessàriament únic) on el valor de la funció coincideix amb la mitjana.

(a) $f(x) = 9 - x^2$, $[a, b] = [-3, 3]$

$$\overline{f} = \frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^3 (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 = \frac{36}{6} = \boxed{6}$$

(b) $f(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, \pi]$

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

(c) $f(x) = \dfrac{4(x^2+1)}{x^2}$, $[a, b] = [1, 3]$

$$\overline{f} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{4(x^2+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 2\left[x - \frac{1}{x}\right]_1^3 = \boxed{\frac{16}{3}}$$

Problema 15: *Calculeu les derivades de les funcions següents.*

(a) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \sin t\;\mathrm{d}t$

En aquest cas és molt fàcil calcular la integral, $F(x) = \Big[-\cos t\Big]_{t=a}^{t=x^3} = \cos a - \cos x^3$, i derivar-la directament.

Tot i així, vegem com fer-ho a partir de la regla de Leibniz. La funció és del tipus $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, amb $f(t) = \sin t$, $u(x) \equiv a$, $v(x) = x^3$. Aleshores tenim:

$$F'(x) = f(v(x))\,v'(x) - f(u(x))\,u'(x) = \sin x^3 \cdot 3x^2 - 0 = 3x^2 \sin x^3.$$

(b) $F(x) = \int_{15}^{x} \left(\int_{8}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + \sin t^2} \right) \mathrm{d}y$

Hem de parar molta atenció a com està construïda la funció. A la part interna tenim la funció $g(t) = \dfrac{1}{1 + t^2 + \sin t^2}$, a continuació definim $h(y) = \int_8^y g(t)\,\mathrm{d}t$, i finalment $F(x) = \int_{15}^{x} h(y)\,\mathrm{d}y$. Ho podem veure a l'esquema següent:

$$F(x) = \int_{15}^{x} \underbrace{\left(\int_{8}^{y} \underbrace{\frac{1}{1 + t^2 + \sin t^2}}_{g(t)} \,\mathrm{d}t \right)}_{h(y)} \mathrm{d}y.$$

Recordem que una funció integral $F(x) = \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$ té com a derivada $F'(x) = f(x)$ (es podria fer amb la regla de Leibniz però no cal). Llavors,

$$F'(x) = h(x) = \int_8^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_8^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + \sin t^2}\,.$$

I ja no podem fer més, perquè no és viable calcular una primitiva de $g(t)$. Observem que teníem dues integrals una dins de l'altra, i que en derivar una vegada n'hem eliminada només una.

Si ens demanessin la derivada segona, ja no apareixeria cap símbol d'integral al resultat: $F''(x) = h'(x) = g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 + \sin x^2}$.

(c) $F(x) = \sin \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin^3 t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \right)$

Aquest apartat és semblant a l'anterior, però ara haurem d'aplicar, a més, la regla de la cadena. Comencem analitzant l'estructura de la funció:

$$F(x) = \sin \underbrace{\left(\int_0^x \underbrace{\sin \underbrace{\left(\int_0^y \underbrace{\sin^3 t}_{g(t)} \,\mathrm{d}t \right)}_{G(y)}}_{h(y)} \mathrm{d}y \right)}_{H(x)},$$

és a dir, comencem amb $g(t) = \sin^3 t$, després definim $G(y)$ com a funció integral, a continuació $h(y) = \sin G(y)$, seguim amb $H(x)$ com una nova funció integral, i finalment $F(x) = \sin H(x)$. Ara ja podem derivar:

$$\begin{aligned} F'(x) &= H'(x) \cdot \cos H(x) = h(x) \cdot \cos H(x) = \sin G(x) \cdot \cos H(x) \\ &= \sin \left(\int_0^x \sin^3 t \,\mathrm{d}t \right) \cdot \cos \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin^3 t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \right). \end{aligned}$$

En aquest cas, podem desenvolupar una mica més el resultat si calculem la integral de $g(t) = \sin^3 t$ (trigonomètrica). Ho deixem com a exercici.

(d) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2-1}^{4x^3} \cos(t+1)\,\mathrm{d}t$

Podríem calcular directament $F(x) = \Big[\ \sin(t+1)\ \Big]_{t=x^2-1}^{t=4x^3} = \sin(4x^3+1) - \sin x^2$, i derivar aquesta expressió, com ja hem comentat a l'apartat (a).

Però vegem com fer-ho amb la regla de Leibniz:

$$F'(x) = \cos(t+1)\Big|_{t=4x^3} \cdot (4x^3)' - \cos(t+1)\Big|_{t=x^2-1} \cdot (x^2-1)' = 12x^2\cos(4x^3+1) - 2x\cos x^2.$$

Aquí hem usat la notació $(\cdots)\Big|_{t=\mathrm{expr}}$, que vol dir que a la funció de dins el parèntesi li substituïm la variable t per l'expressió indicada.

Problema 16: *Calculeu la recta tangent a la gràfica de la funció* $F(x) = \displaystyle\int_0^x [\ln(t+\mathrm{e})]^2\,\mathrm{d}t$ *en el punt d'abscissa* $x = 0$.

L'equació de la recta tangent en el punt $(0, F(0))$ és $y = F(0) + F'(0)(x-0)$. D'una banda, tenim $F(0) = \displaystyle\int_0^0 (\cdots) = 0$. Per trobar la derivada, usem que $F(x)$ és funció integral de $f(x) = [\ln(x+\mathrm{e})]^2$, i per tant $F'(0) = f(0) = [\ln \mathrm{e}]^2 = 1$. Així, la recta tangent és $\boxed{y = x}$.

Problema 17: *Considereu la funció* $F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida per* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (integral gaussiana).

(a) *Proveu la desigualtat* $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ *per a tot* $x > 1$, *i deduïu que existeix* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$.

(b) *Estudieu la derivabilitat i la gràfica de la funció* $F(x)$.

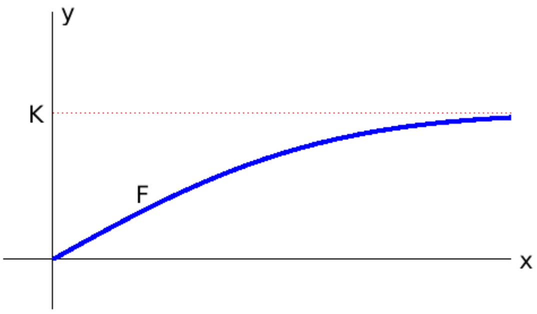
(a) Per a $t \ge 1$ es compleix que $t^2 \ge t$, per tant $\mathrm{e}^{-t^2} \le \mathrm{e}^{-t}$, i per tant $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ per a qualsevol $x > 1$ (per la monotonia de la integral).

Si ara definim $I_0 = F(1) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (una constant que no sabem calcular a mà), per a $x > 1$ tenim:

$$F(x) = I_0 + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le I_0 + \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = I_0 + \Big[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_1^x = I_0 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} \le I_0 + \mathrm{e}^{-1},$$

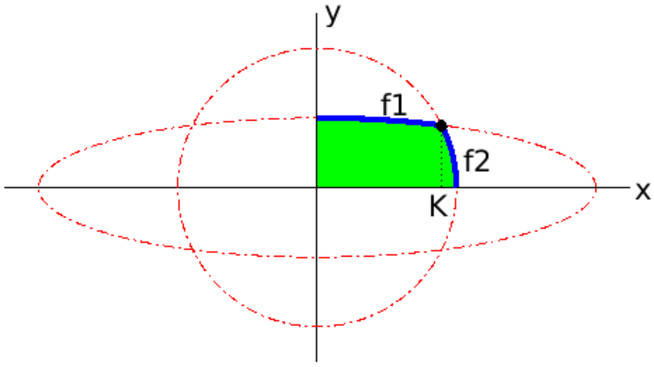
és a dir, hem fitat la integral gaussiana que no sabíem calcular per una altra integral que sí sabíem calcular i això ens ha permès trobar una fita superior de $F(x)$ per a $x > 1$. D'altra banda $F(x)$ és una funció creixent, ja que és funció integral d'una funció positiva. Tota funció creixent i fitada superiorment té un límit (finit) quan $x \to \infty$ (necessàriament ha de tenir una asímptota horitzontal). Per tant, existeix $K = \displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ $(\le I_0 + \mathrm{e}^{-1})$.

(b) La funció $F(x)$ és derivable, ja que és funció integral d'una funció contínua. La seva derivada és $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Ja sabem que $F(x)$ és una funció creixent, amb $F(0) = \int_0^0(\cdots) = 0$, i que té una asímptota horitzontal $y = K$. A més, és còncava ja que $F''(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \le 0$. Amb aquestes dades ja podem dibuixar la seva gràfica (usant altres mètodes, es pot veure que $K = \sqrt{\pi}/2$).



Problema 20: *Calculeu l'àrea del domini* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 4, \ x^2/16+y^2 \leq 1\}$.
[*Ind.*: *D és la intersecció d'un cercle de radi 2 i una el·lipse de semieixos* $a=4$ *i* $b=1$.]

Podem veure aquest domini representat a la figura, i per simetria veiem clarament que podem restringir-nos al primer quadrant, i multiplicar el resultat obtingut per 4.
Centrant-nos en la part del domini continguda al primer quadrant, podem calcular-ne l'àrea com a suma de dues integrals definides:



- de la funció $f_1(x) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}}$ entre 0 i K;
- de la funció $f_2(x) = \sqrt{4-x^2}$ entre K i 2.

Hem obtingut aquestes dues funcions aïllant y en funció de x de les equacions $x^2/16+y^2=1$ i $x^2+y^2=4$ respectivament, i quedant-nos amb l'arrel positiva ja que som al primer quadrant. En altres paraules, veient la semiel·lipse superior i la semicircumferència superior com a gràfiques de funcions.

Ens cal conèixer el valor de K, que apareixerà als límits d'integració. El trobem fàcilment, resolent el sistema

$$\frac{x^2}{16}+y^2=1, \qquad x^2+y^2=4.$$

Obtenim quatre punts $\left(\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (intersecció entre les dues corbes), dels quals només un es troba sobre el primer quadrant. Llavors, $K=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Calculem les dues integrals, que són de tipus irracional i es resolen aplicant canvis estàndard que les transformen en triginomètriques. En primer lloc,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^K \sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^\alpha \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\alpha (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\alpha = 2\alpha+\sin 2\alpha = 2\alpha+\frac{4}{5}, \end{aligned}$$

on hem aplicat el canvi $x=4\sin t$, que comporta que $\mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t$. A més, quan fem un canvi en una integral definida, hem de canviar els extrems d'integració: $x=0$ corrrespon a $t=0$, i $x=K$ correspon a $x=\alpha=\arcsin(K/4)=\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)$ (aquest α no és cap valor conegut i el deixem, de moment, indicat com a α). També hem usat que

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha = 2\,\frac{K}{2}\sqrt{1-\left(\frac{K}{2}\right)^2} = 2\,\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}.$$

I ara calculem la segona integral,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_K^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_\beta^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = 2\int_\beta^{\pi/2} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \\ &= 2\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_\beta^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\sin 2\beta}{2}\right) = \pi-2\beta-\sin 2\beta = \pi-2\beta-\frac{4}{5}, \end{aligned}$$

on hem aplicat el canvi $x=2\sin u$, amb $\mathrm{d}x = 2\cos u\,\mathrm{d}u$, i canviem els extrems: $x=K$ correspon a $u=\beta=\arcsin(K/2)=\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)$ (que deixem també indicat), i $x=2$ correspon a $u=\pi/2$. També podem veure, amb càlculs semblants al cas anterior, que $\sin 2\beta = 4/5$.

Finalment, sumant les dues integrals obtingudes i multiplicant per 4, obtenim l'àrea:

$$\mathrm{Area}(D) = 4(I_1 + I_2) = 4(2\alpha + \pi - 2\beta) = 4\pi + 8(\alpha - \beta) = 16\,\alpha = \boxed{16 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}},$$

on hem usat que $\alpha + \beta = \pi/2$, que es dedueix del fet que $\beta = \arcsin(K/2) = \arccos(K/4)$ ja que $(K/4)^2 + (K/2)^2 = 1$, i que $\arcsin z + \arccos z = \pi/2$ per a tot z entre 0 i $\pi/2$.

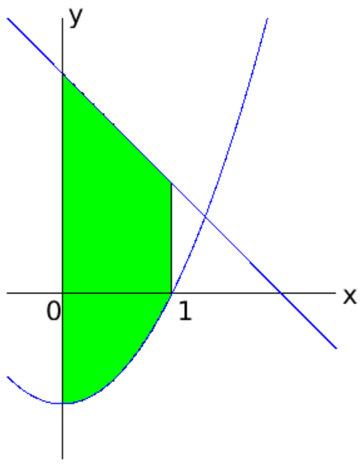
Problema 21: *Trobeu l'àrea delimitada per les gràfiques de les funcions següents.*

(a) $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 2 - x$, per a $x \in [0, 1]$.

L'àrea ve donada per la integral de $|f(x) - g(x)|$ a l'interval indicat. En aquest cas, tenim $g(x) \geq f(x)$ per a tot $x \in [0, 1]$ (vegeu figura). Per tant calculem:

$$\text{Àrea} = \int_0^1 \big[(2 - x) - (x^2 - 1)\big]\, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 3 - x - x^2\, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{13}{6}}$$

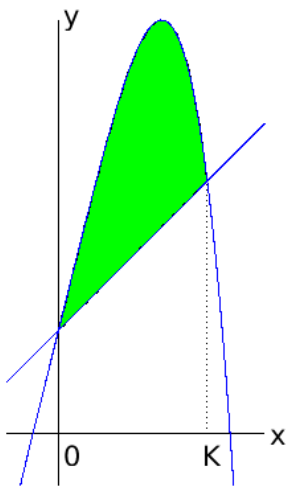
(podem usar que $\int_0^1 x^\alpha\, \mathrm{d}x = 1/(\alpha + 1)$ sempre que $\alpha > -1$; en canvi per a $\alpha \leq -1$ és una impròpia divergent).



(b) $f(x) = -x^4 + 4x + 1$ i $g(x) = x + 1$.

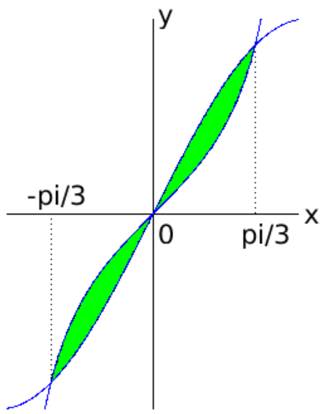
Com que aquí no ens donen cap interval, haurem de buscar els punts d'intersecció de les dues gràfiques. Resolent $f(x) = g(x)$ tenim $x^4 - 3x = 0$ i per tant les interseccions vénen donades per $x = 0$ i $x = \sqrt[3]{3}$. La funció $f(x)$ és còncava entre aquestes dues abscisses (ja que $f''(x) < 0$) i la funció $g(x)$ té com a gràfica una recta. Això ens diu que $f(x) \geq g(x)$ entre 0 i $K = \sqrt[3]{3}$ (vegeu figura). Integrem:

$$\text{Àrea} = \int_0^{\sqrt[3]{3}} \big[(-x^4 + 4x + 1) - (x + 1)\big]\, \mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^4 + 3x)\, \mathrm{d}x$$
$$= \Big[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} \Big]_0^{\sqrt[3]{3}} = -\frac{3^{5/3}}{5} + \frac{3 \cdot 3^{2/3}}{2} = \boxed{\frac{9}{10}\, 3^{2/3}}$$



(c) $f(x) = 2\sin x$ i $g(x) = \tan x$, per a $x \in [-\pi/3, \pi/3]$.

Donat que tracta de dues funcions senars, les estudiem només per a $x \in [0, \pi/3]$. En aquest interval, la funció $f(x)$ és còncava, i la funció $g(x)$ és convexa (són gràfiques prou conegudes). A més, coincideixen als extrems: $f(0) = g(0) = 0$ i $f(\pi/3) = g(\pi/3) = \sqrt{3}$. Amb aquesta informació, podem dir que $f(x) \geq g(x)$ a l'interval $[0, \pi/3]$ (i seria al revés a l'interval $[-\pi/3, 0]$; vegeu figura). Calculem la integral a l'interval $[0, \pi/3]$ i multipliquem per 2,



$$\text{Àrea} = 2\int_0^{\pi/3} (2\sin x - \tan x)\,\mathrm{d}x = 2\Big[-2\cos x + \ln|\cos x| \Big]_0^{\pi/3}$$
$$= 2((-1 + \ln(1/2)) - (-2)) = \boxed{2(1 - \ln 2)}$$

(d) $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 2x + 1$.

La funció $f(x)$ és convexa a tot $\mathbb{R}$ i per tant només pot tallar la gràfica de $g(x)$ (una recta) en dos punts, i de fet es tallen en $x = 0$ i $x = 1$. Així veiem que $f(x) \leq g(x)$ entre 0 i 1, i obtenim:

$$\text{Àrea} = \int_0^1 (2x + 1 - 3^x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + x - \frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^1 = \boxed{2 - \frac{2}{\ln 3}}$$

Problema 22: *Analitzeu si les següents integrals impròpies són convergents i, en cas afirmatiu, calculeu el seu valor.*

Nota: Per a cada integral impròpia, marquem en blau el "punt" (finit o infinit) on és impròpia. Després, quan s'estudia o calcula la integral cal fer-ho com un límit en aquest "punt".

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = 4\Big[\arctan x \Big]_1^{\infty} = 4\left(\lim_{x\to\infty} \arctan x - \arctan 1 \right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{\pi},$
essent per tant una integral impròpia convergent. Encara que hem aplicat la regla de Barrow amb un extrem a l'infinit, hem d'entendre que estem calculant un límit; en realitat caldria escriure

$$\int_1^{\infty} \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{4\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 4\lim_{x\to\infty} \Big[\arctan t \Big]_{t=1}^{t=x} = 4\left(\lim_{x\to\infty} \arctan x - \frac{\pi}{4} \right) = \pi.$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \underbrace{\Big[\mathrm{e}^{-x}\sin x \Big]_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \underbrace{\Big[-\mathrm{e}^{-x}\cos x \Big]_0^{\infty}}_{1} - \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x,$

on hem integrat dues vegades per parts, escollint primer $u = \mathrm{e}^{-x}$ i $\mathrm{d}v = \cos x$, i després $u = \mathrm{e}^{-x}$ i $\mathrm{d}v = \sin x$. Com que finalment hem obtingut altre cop la integral inicial, podem resoldre una equació, i ens dóna $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}}$, integral impròpia convergent.

(c) $\displaystyle\int_0^{8} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{8-x}} = \int_8^{0} \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt[3]{u}} = \int_0^8 u^{-1/3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{2/3}}{2/3} \right]_{0^+}^{8} = \frac{3}{2}\left(8^{2/3} - \lim_{u\to 0^+} u^{2/3} \right) = 6 - 0 = \boxed{6},$
integral impròpia convergent. La integral inicial era impròpia en $x = 8$, ja que la funció té una asímptota vertical en aquest punt. En primer lloc, hem fet el canvi $x = 8 - u$, amb $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$, i hem transformat els extrems: $x = 0$ ens dóna $u = 8$, i $x = 8$ ens dóna $u = 0$, punt on és impròpia la nova integral (ho fem perquè serà més còmode fer un límit a l'origen que en un altre punt). Ens han quedat els nous extrems capgirats, però ho redrecem canviant el signe de la integral. La nova integral és senzilla, i en aplicar la regla de Barrow hem de tenir en compte, quan avaluem al 0, que en realitat estem fent un límit per la dreta.

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan\theta \,\mathrm{d}\theta = -\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\Big[\ \ln|\cos\theta|\ \Big]_0^{(\pi/2)^-} = -\lim_{\theta\to(\pi/2)^-} \ln|\cos\theta| + \ln|\cos 0|$

$$= -\ln(0^+) + \ln 1 = -(-\infty) + 0 = \boxed{\infty},$$

integral impròpia divergent.

Problema 22: *Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents.*

(a) $\displaystyle I = \int_1^{\infty} \frac{x^2 \arctan x}{2x^3 + \sin x}\,\mathrm{d}x$

Tenim una funció positiva. Notem que $\arctan x$ tendeix a una constant quan $x \to \infty$, i que $\sin x$ es manté fitat. Per tant, és raonable comparar amb $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$. Calculem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2\arctan x}{2x^3+\sin x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{2 + \dfrac{\sin x}{x^3}} = \frac{\pi}{4}\,,$$

Per tant, les dues integrals són equivalents: $\displaystyle I \sim \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, divergent.

(b) $\displaystyle I_\alpha = \int_0^{\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}\right) x^\alpha \,\mathrm{d}x$

Aquesta integral depèn d'un paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$. Clarament és impròpia a ∞, i possiblement també al 0, segons el signe de α i depenent també del comportament de $1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}$ quan $x \to 0^+$. També hem d'esbrinar el signe de la funció (si es tracta d'una funció positiva, negativa, o de signe canviant). Observem els fets següents:

$$1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} > 0 \quad \text{per a tot} \quad x > 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1/0^+} = 1 - \mathrm{e}^{-\infty} = 1 - 0 = 1\,;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}}{1/\sqrt{x}} = [\,\text{canvi } u = 1/\sqrt{x}\,] = \lim_{u\to 0^+} \frac{1 - \mathrm{e}^{-u}}{u} = [\,\text{L'Hôpital}\,] = 1\,.$$

Hem vist doncs que la funció és positiva, i amb quines funcions la podem comparar prop de 0 i ∞. Dividim doncs la semirecta $[0,\infty)$ en dues parts, tallant per exemple per $x = 1$, i així tenim la suma de dues integrals, $\displaystyle I_\alpha = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$, i a cadascuna d'elles apliquem comparació amb una funció adequada:

$$\int_0^1 \left(1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}\right) x^\alpha \,\mathrm{d}x \sim \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{-\alpha}}\,,$$

convergent si i només si $-\alpha < 1$, és a dir $\alpha > -1$;

$$\int_1^{\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}\right) x^\alpha \,\mathrm{d}x \sim \int_1^{\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2-\alpha}}\,,$$

convergent si i només si $1/2 - \alpha > 1$, és a dir $\alpha < -1/2$.

Com que en dividir una integral impròpia en dues parts han de ser convergents totes dues, deduïm que I_α és convergent si $\boxed{-1 < \alpha < -1/2}$ i divergent en cas contrari.

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-2\cos^5 x}{2+\mathrm{e}^x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

Aquí tenim una funció que va canviant de signe, ja que el cosinus fa que el numerador vagi oscil·lant entre -1 i 3. Però podem fitar en valor absolut:

$$\left|\frac{1-2\cos^5 x}{2+\mathrm{e}^x+\sin x}\right| \le \frac{3}{\mathrm{e}^x} = 3\,\mathrm{e}^{-x} \qquad x \ge 0,$$

on hem usat que $|1-2\cos^5 x| \le 1+2\,|\cos^5 x| \le 3$, i que $2+\sin x \ge 0$. Del fet que $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ és convergent, deduïm que la nostra integral I és convergent (absolutament).

(d) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-x\sin x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

També tenim una funció que va canviant de signe. La intenció inicial seria fitar-la en valor absolut per alguna funció proporcional a $1/x^2$. Però la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ és impròpia a 0 i ∞, i a més divergent, mentre que la integral I era impròpia només a ∞. El que farem serà dividir la semirecta $[0,\infty)$ en dues parts, tallant per exemple per $x=1$:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{1-x\sin x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x}_{\text{pròpia}} + \int_1^{\infty} \frac{1-x\sin x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

i, per a la segona integral, fitem en valor absolut:

$$\left|\frac{1-x\sin x}{1+x^3}\right| \le \frac{1+|x\sin x|}{x^3} \le \frac{x+x}{x^3} = \frac{2}{x^2}\,, \qquad x \ge 1.$$

Com que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2}$ és convergent, deduïm que I és convergent (absolutament).

Problema 25: *Trobeu l'àrea compresa entre la gràfica de* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ *i la seva asímptota horitzontal.*

Fàcilment veiem que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, i per tant $y=1$ és asímptota horitzontal pels dos costats ($x\to\pm\infty$). La gràfica de la funció queda sempre per sota de l'asímptota: $f(x)<1$ per a tot $x\in\mathbb{R}$. Per tant, podem calcular l'àrea com la següent integral impròpia,

$$\text{Àrea} = \int_{-\infty}^{\infty} (1-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4\Big[\arctan x\Big]_0^{\infty} = 4\arctan\infty = \boxed{2\pi},$$

que ha resultat ésser una integral impròpia convergent. Notem que hem usat que la funció és parella, per restringir-nos a la semirecta $[0,\infty)$ i multiplicar el resultat per 2 (altrament, caldria dividir la integral en dues integrals impròpies, una a $-\infty$ i l'altra a ∞).