Interpolació per splines.

Quan volem interpolar en un conjunt d'abscisses molt gran, si usem interpolació de Lagrange tindrem un polinomi de grau elevat, i això en general dóna errors grans (fenomen de Runge).

Com a alternativa, podem dividir l'interval en subintervals, i en cadascun fer servir un polinomi de grau petit, de manera que la unió entre els diferents polinomis sigui prou regular o suau.

- En un interval $[a,b]$, considerem abscisses o nodes $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, en els quals suposarem coneguts $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Def. Una funció $s(x)$, $x \in [a,b]$, és una funció spline de grau r amb nodes $x_0, \dots, x_n$, si compleix:

- sobre cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, és un polinomi de grau r.
- sobre l'interval $[a,b]$, és de classe C^{r-1}
  (és a dir, $s(x), s'(x), s''(x), \dots, s^{(r-1)}(x)$ contínues)

Podem considerar splines lineals, quadràtics, cúbics, ...

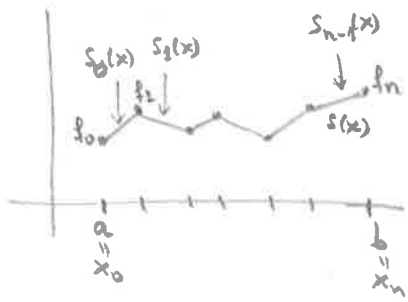
- Els splines lineals corresponen a interpolar per una línia poligonal.

Sobre cada interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, tindrem

$$s(x) = s_i(x) = f_i + B_i (x - x_i);$$

amb $f_i = f(x_i)$ donats, $B_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$



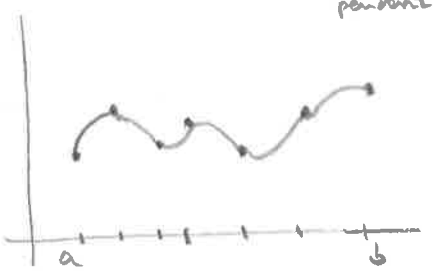
Notem que $s(x)$ contínua però $s'(x)$ discontínua,
→ poc útils per a moltes aplicacions.

Error: $|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_i \left(h_i^2 \cdot \max_{[x_i, x_{i+1}]} |f''| \right)$.

- Splines quadràtics, interpolem per arcs de paràbola.

Són de classe C^1: $s(x)$, $\underbrace{s'(x)}_{\text{pendent}}$ contínues, $\underbrace{s''(x)}_{\text{relacionat amb la curvatura}}$ discontínua (en general).

la curvatura: $K(x) = \dfrac{|s''(x)|}{(1 + s'(x)^2)^{3/2}}$.



• Splines cúbics. Són els més utilitzats.

→ funció C^2: $s(x)$, $s'(x)$, $s''(x)$ contínues, $s'''(x)$ discontínua (en general)
(suficient per a la majoria d'aplicacions)

Tenen la propietat de minimitzar l'energia de deformació elàstica:

$$E = \int_a^b K(x)^2 dx \underset{\substack{\uparrow \\ \left[\text{si } s'(x)\simeq \text{const.} \\ \text{(flexions petites)}\right]}}{\simeq} \text{const.} \int_a^b s''(x)^2 dx \quad \text{(elastic strain energy)}$$

Estudiem el nombre d'equacions i incògnites:

sobre cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$, el polinomi $s_i(x)$ ve donat per 4 coeficients: $s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$ ⟶ $4n$ coefs. a determinar (incògnites).

Hem d'imposar que $s(x)$ és C^2, i coincideix amb els valors donats a les abscisses:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \\ s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \end{array}\right\} i=0,\dots,n-2 \text{ (abscisses internes)} \\ s(x_i) = f_i, \quad i=0,\dots,n \text{ (totes les abscisses)} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \text{nº condicions (equacions):} \\ 3(n-1)+(n+1) = 4n-2 \end{array}$$

Com que tenim menys equacions que incògnites, podem imposar 2 condicions més.

Sovint s'imposa que $s''(x)$ s'anul·li als extrems: $s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0$

(splines cúbics naturals → els splines cúbics que fan $\int_a^b s''(x)^2 dx$ mínima)

Per determinar els polinomis $s_i(x)$, farem servir el mètode dels moments.

Escrivim $A_i = s(x_i)$, $B_i = s'(x_i)$, $M_i = s''(x_i)$, $i=0,\dots,n$, sabem: $\boxed{\begin{array}{l} A_i = f_i, \ i=0,\dots,n. \\ M_0 = M_n = 0 \end{array}}$

$$\longrightarrow s_i(x) = A_i + B_i(x-x_i) + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{N_i}{6}(x-x_i)^3, \quad i=0,\dots,n-1$$

essent $N_i = \underbrace{s'''(x)}_{\text{const.}}$, $x \in (x_i, x_{i+1})$.

* $s_i''(x) = M_i + N_i(x-x_i)$

Imposant $\underbrace{s_i''(x_{i+1})}_{} = M_i + N_i h_i = \underbrace{M_{i+1}}_{\overset{\shortparallel}{s_{i+1}''(x_{i+1})}}$ ⟶ $\boxed{N_i = \frac{M_{i+1}-M_i}{h_i}}$, $i=0,\dots,n-1$.

$(h_i = x_{i+1} - x_i)$ (així tenim s'' contínua).

* $s_i'(x) = B_i + M_i(x-x_i) + \frac{M_{i+1}-M_i}{2h_i}(x-x_i)^2$.

Imposem $\underbrace{s_i'(x_{i+1})}_{} = B_i + M_i h_i + \frac{M_{i+1}-M_i}{2h_i} h_i^2 = \overset{(*)}{\left(B_i + \frac{M_i+M_{i+1}}{2} h_i = B_{i+1}\right)} = \underbrace{s_{i+1}'(x_{i+1})}_{}$, $i=0,\dots,n-1$

* També imposem $\underbrace{s_i(x_{i+1})}_{} = f_i + B_i h_i + \frac{M_i}{2} h_i^2 + \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i} h_i^3 = f_{i+1} = \underbrace{s_{i+1}(x_{i+1})}_{}$,

$$\Rightarrow \boxed{B_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_i}, \quad i=0,\dots,n-1$$

Substituint B_i, B_{i+1} a (*), obtenim (per a $i=0,\dots,n-2$):

$$\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{2M_i+M_{i+1}}{6}h_i\right) + \frac{M_i+M_{i+1}}{2}h_i = \frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{2M_{i+1}+M_{i+2}}{6}h_{i+1}$$

$$h_iM_i + 2(h_i+h_{i+1})M_{i+1} + h_{i+1}M_{i+2} = 6\underbrace{\left(\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}\right)}_{\parallel \atop d_{i+1}}, \quad i=0,\dots,n-2$$

Tenint en compte que $M_0=M_n=0$, obtenim un sistema lineal per a $M_1,\dots,M_{n-1}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Obs: La matriu T és tridiagonal, simètrica i diagonal dominant

* $T=(t_{ij})$ diagonal dominant si $|t_{ii}| > \sum_{j\neq i}|t_{ij}|$, $\forall i$

  Llavors, $\det T \neq 0$: donat $v\neq 0$, provem que $Tv \neq 0$.

  Si $\max_i |v_i| = |v_k|$, resulta $|(Tv)_k| = \left|\sum_j t_{kj}v_j\right| \geq |t_{kk}v_k| - \sum_{j\neq k}|t_{kj}v_j| \geq \left(|t_{kk}| - \sum_{j\neq k}|t_{kj}|\right)|v_k| > 0$.

* T tridiagonal (simètrica): és un exemple de matriu de tipus banda (amb semibanda $=2$).

  Si n és gran, tenim avantatges des del punt de vista computacional:
  - només cal guardar en memòria 2 diagonals ($O(pn)$ termes si semibanda $=p$)
  - el temps de resolució del sistema és molt més petit que per a una matriu qualsevol ($O(p(p-1)n)$ operacions si semibanda $=p$, $O(n^3)$ operacions en general)

Un cop tenim les M_i, amb les fórmules anteriors podem calcular A_i, B_i, N_i.

Exemple. Determinem els splines cúbics (naturals) que interpolin la taula

x	0	1	2	3	4
f	2	3	4	3	2

Tenim $n=4$, $h_i=1$ $\forall i$ $\rightsquigarrow$ $T=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Calculem: $d_{i+1} = 6(f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i)$ $\rightsquigarrow$ $d_1=0$, $d_2=-12$, $d_3=0$

Resolent, $M_1=\frac{6}{7}$, $M_2=-\frac{24}{7}$, $M_3=\frac{6}{7}$, i afegim $M_0=M_4=0$

També tenim: $A_i=f_i$,
$B_0=\frac{6}{7}$, $B_1=\frac{9}{7}$, $B_2=0$, $B_3=-\frac{9}{7}$
$N_0=\frac{6}{7}$, $N_1=-\frac{30}{7}$, $N_2=\frac{30}{7}$, $N_3=-\frac{6}{7}$

$$\rightarrow \begin{cases} S_0(x) = 2+\frac{6}{7}x+\frac{1}{7}x^3 & \text{a } [0,1] \\ S_1(x) = 3+\frac{9}{7}(x-1)+\frac{3}{7}(x-1)^2-\frac{5}{7}(x-1)^3 & \text{a } [1,2] \\ S_2(x) = 4-\frac{12}{7}(x-2)^2+\frac{5}{7}(x-2)^3 & \text{a } [2,3] \\ S_3(x) = 3-\frac{9}{7}(x-3)+\frac{3}{7}(x-3)^2-\frac{1}{7}(x-3)^3 & \text{a } [3,4] \end{cases}$$