APROXIMACIÓ DE FUNCIONS

- Sistemes sobredeterminats.

Considerem un sistema lineal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ (n\times m)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{A \cdot x = b}$$

Si $n>m$ el sistema s'anomena sobredeterminat, ja que té més equacions que incògnites. En general no tindrà solució, i ens haurem de conformar amb la "millor solució" d'acord amb un criteri donat.

Criteri d'aproximació per mínims quadrats: [buscar aquell $x \in \mathbb{R}^m$ que minimitzi $\|b - A\cdot x\|$].

(norma: si $v=(v_1,\dots,v_n)$, $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}$)

Una manera de trobar la "millor solució" és resolent el sistema d'equacions normals: $\boxed{A^TA\, x = A^Tb}$,

provè de fer la projecció ortogonal de b sobre el subespai generat per les columnes de A: $A^T(b-Ax)=0$

- la matriu A^TA és $m\times m$ i simètrica
- si rang $A=m$ (màxim) $\Rightarrow \det(A^TA)\neq 0$ (de fet, és definida positiva)

Aproximació polinòmica per mínims quadrats.

Considerem una funció $y=f(x)$, de la qual només coneixem el seu valor en uns punts donats $x_0,x_1,\dots,x_n$ (abscisses o nodes):
$f_0=f(x_0)$, $f_1=f(x_1)$, $\dots$, $f_n=f(x_n)$.

Aquests valors (que poden ser exactes o aproximats), en general seran el resultat d'algun càlcul numèric o un cert experiment.

[Objectiu: aproximar $f(x)$ per un polinomi $p(x)$ de grau $\leq k$ (amb k donada).]

El conjunt $\mathcal{P}_k = \{$polinomis de grau $\leq k\}$ és un esp. vectorial de dim. $k+1$.

$\longrightarrow$ té una base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$

Possibles bases:
- els monomis $1, x, \dots, x^k$ $\rightsquigarrow$ $p(x)=c_0+c_1x+\dots+c_kx^k$
- polinomis ortogonals (veurem com es construeixen)

Escriurem $p(x)=c_0\varphi_0(x)+\dots+c_k\varphi_k(x)$,
on $c_0,\dots,c_k$ són coeficients a determinar.

Si imposem $p(x_i) = f_i$, $i=0,\dots,n$, obtenim un sistema lineal per als coeficients:

$$c_0\varphi_0(x_i) + \dots + c_k\varphi_k(x_i) = f_i \quad i=0,\dots,n.$$

(n+1 eqs., k+1 incògnites)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_k(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_k(x_n) \end{pmatrix}}_{A \,\leftarrow\, (n+1)\times(k+1)} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}}_{b}$$

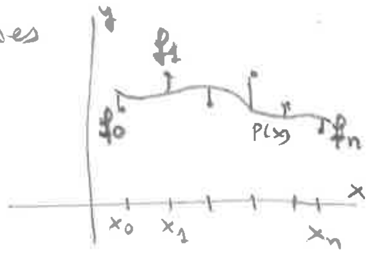
- Si $k=n$, el sistema és $(n+1)\times(n+1)$ i es comprova que $\det A \neq 0$.

  Llavors, tenim una única solució $(c_0,\dots,c_k)$, que ens dóna el polinomi interpolador de f en els punts $x_0,\dots,x_n$.

  Si n és gran, té l'inconvenient que els polinomis de grau elevat tenen un comportament molt oscil·latori (fenomen de Runge). Llavors, en general el polinomi $p(x)$ serà molt diferent de la funció $f(x)$, per a $x \neq x_0,\dots,x_n$.

  Això encara és més greu si només coneixem els valors $f_0,\dots,f_n$ aproximadament, ja que aquest error afecta molt al polinomi interpolador $p(x)$.

- Si $k<n$, el sistema és sobredeterminat. En general, no podrem aconseguir $p(x_i)=f_i$ $\forall i$, i demanarem que les diferències $d_i = f_i - p(x_i)$ siguin el més petites possible.



  En l'aproximació per mínims quadrats, demanem que que $\sum_{i=0}^{n} d_i^2$ sigui mínima.

  (altres opcions serien: $\sum_{i=0}^{n} |d_i|$ mínima, $\max_{i=0,\dots,n} |d_i|$ mínima, etc.)

Deduïm el sistema d'eqs normals:

Hem de trobar $c_0,\dots,c_k$ que facin mínima la funció

$$F(c_0,\dots,c_k) = \sum_{i=0}^{n} \left(f_i - c_0\varphi_0(x_i) - \dots - c_k\varphi_k(x_i)\right)^2$$

Def producte escalar associat als punts $x_0,\dots,x_n$:
si f, g funcions,
$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, g(x_i)$$
$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial c_j} = -2\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\left(f_i - c_0\varphi_0(x_i) - \dots - c_k\varphi_k(x_i)\right)^2 =$$

$(j=0,\dots,n)$
$$= -2\left[\langle\varphi_j, f\rangle - c_0\langle\varphi_j,\varphi_0\rangle - \dots - c_k\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \langle\varphi_j,\varphi_0\rangle c_0 + \dots + \langle\varphi_j,\varphi_k\rangle c_k = \langle\varphi_j, f\rangle, \quad j=0,\dots,n.$$

Obtenim el sistema d'equacions normals:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle \varphi_0,\varphi_0\rangle & \cdots & \langle \varphi_0,\varphi_k\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_k,\varphi_0\rangle & \cdots & \langle \varphi_k,\varphi_k\rangle \end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ A^TA \\ (k+1)\times(k+1)}} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle \varphi_0,f\rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_k,f\rangle \end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ A^Tb}}$$

Resolent-lo, obtenim el polinomi $p = c_0\varphi_0 + \cdots + c_k\varphi_k \in \mathcal{P}_k$ tal que la suma $\sum_{i=0}^{n} d_i^2$ és mínima.

Notes

(a) De les eq. normals deduïm:

$\langle \varphi_j, p\rangle = \langle \varphi_j, f\rangle$, $j=0,\dots,n$.

$\langle p,p\rangle = \langle p,f\rangle$

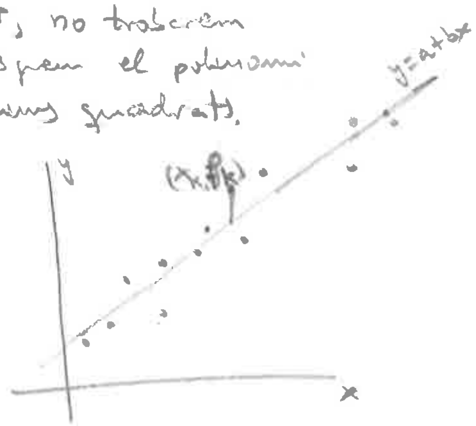
$\langle p, f-p\rangle = 0$ (el polinomi p és la projecció ortogonal de f sobre l'espai $\mathcal{P}_k$)

(b) Tenim: $\sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \langle f-p, f-p\rangle = \langle f,f\rangle - \langle p,p\rangle$

(c) La desviació quadràtica mitjana és: $\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} d_i^2}$

- Exemple: recta de regressió.

Tenim un conjunt de dades (x_i, f_i), $i=0,\dots,n$, que sospitem que satisfan una relació del tipus $y = a + bx$. Però per errors en les dades o perquè el model lineal no és prou acurat, no trobarem cap recta que passi per tots els punts. Llavors, busquem el polinomi de grau 1 que ens doni la millor aprox. per mínims quadrats.



Escrivim $p(x) = a + bx = a\,\varphi_0(x) + b\,\varphi_1(x)$,

amb $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$.

Sistema sobredeterminat: $\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

Sistema d'eqs. normals: $\begin{pmatrix} n+1 & x_0+\cdots+x_n \\ x_0+\cdots+x_n & x_0^2+\cdots+x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0+\cdots+f_n \\ x_0f_0+\cdots+x_nf_n \end{pmatrix}$

P. ex., per a la taula

x	0.25	0.5	0.75	1
f	0.4	0.5	0.9	1.28

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2.5 \\ 2.5 & 1.875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.08 \\ 2.305 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.01 \\ b = 1.216 \end{cases}$

$\boxed{y = 0.01 + 1.216x}$

Calculant:

$p(x_i)$	0.314	0.618	0.922	1.226
d_i	0.086	−0.118	−0.022	0.054

$\leadsto$ Desv. quadr. mitjana $= 0.0786130$

- Obs. Per resoldre el sistema d'eqs normals, cal haver calculat tots els productes escalars $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle$ que formen la matriu A^TA, en total $(k+1)^2$. Això pot ser costós si el nombre $n+1$ de punts és gran. A més, en alguns casos la matriu A^TA pot ser "mal condicionada" des del punt de vista numèric (petits errors d'arrodoniment en el càlcul dels coeficients donen lloc a importants errors a la solució). Aquests problemes es poden evitar usant polinomis ortogonals, per als quals la matriu A^TA és diagonal.

Polinomis ortogonals.

Ara considerem, per a l'espai $\mathcal{P}_k = \{$polinomis de grau $\leq k\}$, una base $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_k(x)$ tal que:

- cada $\varphi_i(x)$ és un polinomi de grau i, mònic (coef. principal $=1$)
- els $\varphi_i(x)$ són ortogonals sobre $x_0, \ldots, x_n$:
$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

(Obs. cada φ_i és ortogonal a $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1} \Rightarrow \varphi_i$ ortogonal a tots els polinomis de grau $\leq i-1$.

Llavors, la matriu A^TA és diagonal; i directament obtenim la solució:

$$A^TA = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{c_i = \frac{\langle \varphi_i, f \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, \ i = 0, \ldots, k.}$$

[Obs. El polinomi obtingut $p = c_0\varphi_0 + \cdots + c_k\varphi_k$ compleix $\langle p, f \rangle = c_0^2 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle + \cdots + c_k^2 \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle$

Comprovem que els polinomis ortogonals es poden calcular mitjançant una recurrència, que els determina de manera única.

$$\begin{cases} \varphi_{i+1}(x) = (x - \beta_i)\varphi_i(x) - \gamma_i \varphi_{i-1}(x), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \\ \varphi_0(x) = 1, \quad \underbrace{\varphi_{-1}(x) = 0}_{\text{(conveni)}}, \end{cases}$$

essent
$$\begin{cases} \beta_i = \dfrac{\langle x, \varphi_i^2 \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, & i \geq 0 \\ \gamma_i = \dfrac{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_{i-1} \rangle}, & i \geq 1 \\ (\gamma_0 = 0) \end{cases}$$

Prova: per inducció sobre i, comprovem que cada φ_i és ortogonal als anteriors: $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$.

$i=1$: $\varphi_1 = x - \beta_0, \quad \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = \langle x - \beta_0, 1 \rangle = \langle x, 1 \rangle - \beta_0 \langle 1, 1 \rangle = 0 \Rightarrow \beta_0 = \dfrac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$

(obs. $\langle 1, 1 \rangle = n+1, \quad \langle x, 1 \rangle = \sum_{j=0}^{n} x_j$)

$i \geq 2$:

$$\varphi_{i+1} = (x - \beta_i)\varphi_i - \gamma_i \varphi_{i-1}$$

$$0 = \langle \varphi_{i+1}, \varphi_i \rangle = \langle x\varphi_i, \varphi_i \rangle - \beta_i \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle - \gamma_i \underbrace{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle}_{\text{0 hip. inducc.}} \Rightarrow \beta_i = \frac{\langle x\varphi_i, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle} = \frac{\langle x, \varphi_i^2 \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}$$

$$\boxed{\langle x\varphi_i, \varphi_i \rangle = \langle x, \varphi_i^2 \rangle = \sum x_j \varphi_i(x_j)^2}$$

$$0 = \langle \varphi_{i+1}, \varphi_{i-1} \rangle = \langle x\varphi_i, \varphi_{i-1} \rangle - \beta_i \underbrace{\langle \varphi_i, \varphi_{i-1} \rangle}_{\text{0 hip. ind.}} - \gamma_i \langle \varphi_{i-1}, \varphi_{i-1} \rangle$$

$$\Rightarrow \gamma_i = \frac{\langle x\varphi_i, \varphi_{i-1} \rangle}{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_{i-1} \rangle} = \frac{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_{i-1} \rangle}$$

$\varphi_i = (x - \beta_{i-1})\varphi_{i-1} - \gamma_{i-1}\varphi_{i-2}$

$\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \langle x\varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle - \beta_{i-1} \underbrace{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle}_{0} - \gamma_{i-1} \underbrace{\langle \varphi_{i-2}, \varphi_i \rangle}_{0}$ (hip. ind.)

si $0 \leq j \leq i-2$,

$$\langle \varphi_{i+1}, \varphi_j \rangle = \langle x\varphi_i, \varphi_j \rangle - \beta_i \underbrace{\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle}_{0} - \gamma_i \underbrace{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_j \rangle}_{0} =$$

$$= \langle \varphi_i, x\varphi_j \rangle = 0 \quad \text{ja que } x\varphi_j \text{ té grau } j+1 \leq i-1.$$

Exemple

x	0.25	0.5	0.75	1
f	0.4	0.5	0.9	1.28

$\longrightarrow$ trobem l'aproximació quadràtica per mínims quadrats ("paràbola de regressió")

Buscarem l'aproximació usant polinomis ortogonals:

$p(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$

(una altra possibilitat seria buscar $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ $\rightarrow$ mateix polinomi)

Primer, construïm els polinomis ortogonals usant la recurrència,

$\varphi_0 = 1$

$\varphi_1 = (x-\beta_0)\varphi_0 = x - 0.625 \longleftarrow \beta_0 = \dfrac{\langle x, \varphi_0^2\rangle}{\langle \varphi_0,\varphi_0\rangle} = \dfrac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \dfrac{2.5}{4} = 0.625$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2 &= (x-\beta_1)\varphi_1 - \gamma_1\varphi_0 = \\ &= (x-0.625)^2 - 0.078125 = \\ &= x^2 - 1.25x + 0.3125\end{aligned}\right\} \longleftarrow \left[\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\langle x, \varphi_1^2\rangle}{\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle} = \frac{0.1953125}{0.3125} = 0.625 \\ \gamma_1 &= \frac{\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle} = \frac{0.3125}{4} = 0.078125.\end{aligned}\right.$$

Sol. del sistema d'eqs. normals:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \frac{\langle\varphi_0, f\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle} = \frac{3.08}{4} = 0.77, \\ c_1 &= \frac{\langle\varphi_1, f\rangle}{\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle} = \frac{0.38}{0.3125} = 1.216. \\ c_2 &= \frac{\langle\varphi_2, f\rangle}{\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle} = \frac{0.0175}{0.015625} = 1.12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} p(x) &= 0.77 + 1.216\,(x-0.625) + \\ &\quad + 1.12\,(x^2 - 1.25x + 0.3125) \\ &= \boxed{0.36 - 0.184\,x + 1.12\,x^2} \end{aligned}$$

Podem calcular directament la desv. quadràtica mitjana, usant:

$$\sum_{i=0}^{3} d_i^2 = \langle f,f\rangle - \langle p,p\rangle = \langle f,f\rangle - c_0^2\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle - c_1^2\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle - c_2^2\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} d_i^2} = 0.0357771$$

Aproximació de Fourier o trigonomètrica.

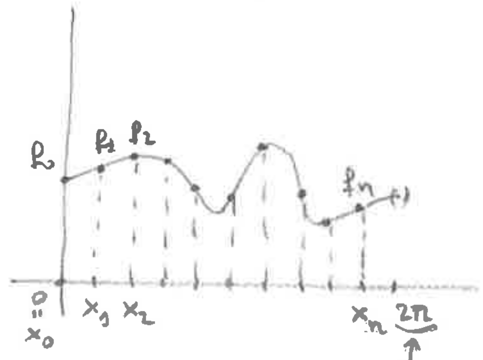
Volem aproximar una funció $y=f(x)$, que sabem que és 2π-periòdica.

Suposem que en coneixem el valor en un cert nombre d'abscisses equidistants:

$$x_s = s\cdot\frac{2\pi}{n+1} \in \underbrace{[0,2\pi]}, \quad s=0,\dots,n.$$

$$f_s = f(x_s)$$

(o bé $[-\pi,\pi]$, o un altre interval de long. 2π)

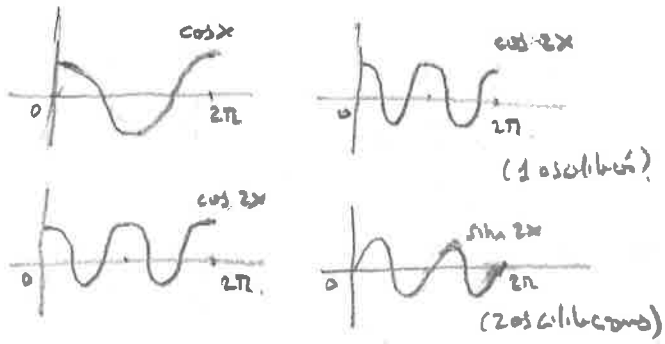


(No el donem, ja que $f(2\pi)=f(0)=f_0$)

L'objectiu serà aproximar $f(x)$ per un polinomi trigonomètric de grau $\leq l$ (amb l donada),

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{l} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

($2l+1$ coefs. a determinar)



$$\mathcal{T}_l = \left\{ \text{polinomis trigonomètrics de grau} \leq l \right\}$$

→ esp. vectorial de dim $2l+1$ (així, $k=2l$)

Com a base, prenem els harmònics

$$\varphi_0(x) = \underset{\cos 0x}{1}, \quad \varphi_1(x) = \cos x, \quad \varphi_2(x) = \sin x, \quad \dots, \quad \varphi_{2l-1}(x) = \cos lx, \quad \varphi_{2l}(x) = \sin lx.$$

L'aproximació per mínims quadrats, ve donada pel sistema d'eqs. normals

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \cdots & \langle\varphi_0,\varphi_{2l}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\varphi_{2l},\varphi_0\rangle & \cdots & \langle\varphi_{2l},\varphi_{2l}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0/2 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_l \\ b_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\varphi_0,f\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi_{2l},f\rangle \end{pmatrix}$$

Resulta que els harmònics són funcions ortogonals, i per tant la matriu és diagonal

$$\langle \cos j_1 x, \cos j_2 x\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j_1 \neq j_2 \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } 1 \leq j_1 = j_2 \leq l \\ n+1 & \text{si } j_1 = j_2 = 0. \end{cases}$$

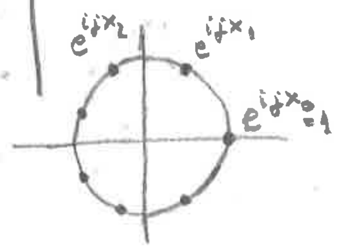
$$\langle \sin j_1 x, \sin j_2 x\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j_1 \neq j_2 \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } 1 \leq j_1 = j_2 \leq l \end{cases}$$

(cal suposar $2l \leq n$)

$$\langle \cos j_1 x, \sin j_2 x\rangle = 0$$

Per deduir les fórmules, usem:

$$\sum_{s=0}^{n} \underbrace{e^{i\cdot j x_s}}_{\cos jx_s + i \sin jx_s} = \sum_{s=0}^{n} \left(e^{i\cdot\frac{2\pi j}{n+1}}\right)^s = \begin{cases} \dfrac{1-e^{i\cdot 2\pi j}}{1-e^{i\frac{2\pi j}{n+1}}} = 0, & \text{si } j \neq \dot{\overline{n+1}} \\ n+1, & \text{si } j = \dot{\overline{n+1}} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \sum_{s=0}^{n} \cos jx_s = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \dot{\overline{n+1}} \\ n+1 & \text{si } j = \dot{\overline{n+1}} \end{cases}$$

$$\sum_{s=0}^{n} \sin jx_s = 0 \quad \text{sempre.}$$

Llavors,

$$\langle \cos j_1 x, \cos j_2 x\rangle = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\left[\cos(j_1-j_2)x_s + \cos(j_1+j_2)x_s\right] = \cdots$$

$$\langle \sin j_1 x, \sin j_2 x\rangle = \frac{1}{2}\sum\left[\cos(j_1-j_2)x_s - \cos(j_1+j_2)x_s\right] = \cdots$$

$$\langle \cos j_1 x, \sin j_2 x\rangle = \frac{1}{2}\sum\left[-\sin(j_1-j_2)x_s + \sin(j_1+j_2)x_s\right] = 0$$

usant $j_1+j_2 \leq 2l < n+1$

Deduïm els coeficients:

$$\boxed{\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{n+1}\langle \cos jx, f\rangle = \frac{2}{n+1}\sum_{s=0}^{n} f_s \cos jx_s, \quad j \geq 0. \\ b_j &= \frac{2}{n+1}\langle \sin jx, f\rangle = \frac{2}{n+1}\sum_{s=0}^{n} f_s \sin jx_s, \quad j \geq 1 \end{aligned}}$$

Obs: inclou $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{n+1}\langle 1, f\rangle = \dfrac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n} f_s$ (mitjana dels f_s)

- si $2l = n$, hauríem obtingut el polinomi interpolador trigonomètric
- si $2l < n$, tenim l'aproximació trigonomètrica de grau l per mínims quadrats, amb desviació quadràtica mitjana, donada per:

$$\sum_{s=0}^{n} d_s^2 = \langle f,f\rangle - \langle p,p\rangle = \langle f,f\rangle - \frac{n+1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{l}(a_j^2+b_j^2)\right] \rightsquigarrow \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{s=0}^{n} d_s^2}$$

$p = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + b_1\varphi_2 + \cdots + a_l\varphi_{2l-1} + b_l\varphi_{2l}$, amb $\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle = n+1$, $\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle = \frac{n+1}{2}$ si $j \geq 1$.

Obs. Pel que hem vist, només podem fer interpolació trigonomètrica si el nombre de punts $n+1$ és senar (cal $n = 2l$). Però si $n+1 = 2l$ és parell, també podem fer interpolació trigonomètrica amb un polinomi del tipus: $p(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{l-1}(a_j \cos jx + b_j \sin jx) + \dfrac{a_l}{2}\cos lx$ (mateixes fórmules per als a_j, b_j)

① Useu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrogen donats aquí per a calcular els pesos atòmics del nitrogen i l'oxigen.

$NO: 30.006$ $N_2O: 44.013$ $NO_2: 46.006$

$N_2O_3: 76.012$ $N_2O_5: 108.010$ $N_2O_4: 92.011$

Escrivint $x = p.a.(N)$, $y = p.a.(O)$, tenim un sistema sobredeterminat:

$$\begin{cases} x+y = 30.006 \\ 2x+y = 44.013 \\ x+2y = 46.006 \\ 2x+3y = 76.012 \\ 2x+5y = 108.010 \\ 2x+4y = 92.011 \end{cases} \quad \text{és a dir} \quad A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = b, \text{ amb } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30.006 \\ 44.013 \\ 46.006 \\ 76.012 \\ 108.010 \\ 92.011 \end{pmatrix}$$

Sistema d'eq. normals: $A^TA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A^Tb$, amb $A^TA = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ 29 & 56 \end{pmatrix}$, $A^Tb = \begin{pmatrix} 716.104 \\ 1302.16 \end{pmatrix}$

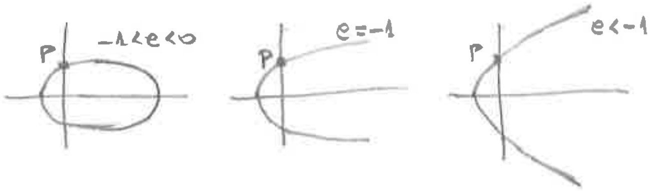
Resolent, obtenim $\boxed{x = 14.0069, \ y = 15.9993}$

② Hom suposa que el cometa Tentax, descobert l'any 1968, és un objecte del Sistema Solar. En un cert sistema de coordenades polars (r, ϕ), centrat en el Sol, s'han mesurat experimentalment les següents posicions del cometa:

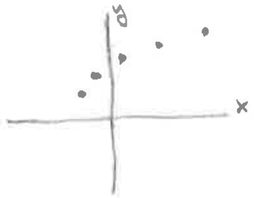
r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02
ϕ	48°	67°	83°	108°	126°

Per les lleis de Kepler i menystenint les pertorbacions dels planetes, el planeta es mou en una cònica que, en les coordenades polars usades, té per equació $r = \dfrac{p}{1+e\cos\phi}$ on p és un paràmetre i e l'excentricitat de la trajectòria. Ajusteu per mínims quadrats els valors de p i e, a partir de les mesures fetes.

Cònica $r = \dfrac{p}{1+e\cos\phi}$ $\begin{cases} \text{Si } |e|<1 \to \text{el·lipse} \\ \text{Si } |e|=1 \to \text{paràbola} \\ \text{Si } |e|>1 \to \text{hipèrbola} \end{cases}$



Segons les dades, les posicions són:



$x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$

Reescrivim l'eq. de la cònica com una expressió lineal en p i e:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\phi} \leadsto r + re\cos\phi = p \leadsto p - r\cos\phi \cdot e = r.$$

A partir de les dades, tenim

$-r\cos\phi$	-1.80665	-0.781462	-0.196210	0.370820	0.599541
r	2.70	2.00	1.61	1.20	1.02

Sistema sobredeterminat:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1.80665 \\ 1 & -0.781462 \\ 1 & -0.196210 \\ 1 & 0.370820 \\ 1 & 0.599541 \end{pmatrix}}_{\text{"}A\text{"}} \begin{pmatrix} p \\ e \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.70 \\ 2.00 \\ 1.61 \\ 1.20 \\ 1.02 \end{pmatrix}}_{\text{"}b\text{"}} \leadsto$$

Sistema d'eqs. normals:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & -1.81396 \\ -1.81396 & 4.41013 \end{pmatrix}, \quad A^Tb = \begin{pmatrix} 8.53 \\ -5.70027 \end{pmatrix}$$

Solució: $\boxed{\begin{array}{l} p = 1.45405 \\ e = -0.694461 \end{array}} \longrightarrow$ el·lipse

③ El nivell de l'aigua del mar del Nord està determinat principalment per l'anomenada marea M_2, el període de la qual és al voltant de les 12 h i, per tant, suposem que té aproximadament la forma,

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{12}t + a_2 \cos \frac{2\pi}{12}t, \quad \text{on } t \text{ es mesura en hores.}$$

S'han fet les següents mesures:

t	0	2	4	6	8	10	[h]
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	[m]

(a) Són ortogonals 1, $\cos \frac{2\pi}{12}t$ i $\sin \frac{2\pi}{12}t$?

(b) Ajusteu $H(t)$ a aquestes mesures usant mínims quadrats.

(c) Trobeu la desviació quadràtica mitjana.

(a)

t	0	2	4	6	8	10
$\frac{2\pi}{12}t$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
1	1	1	1	1	1	1
$\cos \frac{2\pi}{12}t$	1	$1/2$	$-1/2$	-1	$-1/2$	$1/2$
$\sin \frac{2\pi}{12}t$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$

(interval: $[0,12]$)

$$\longrightarrow \begin{cases} \langle 1, \cos \rangle = 0 \\ \langle 1, \sin \rangle = 0 \\ \langle \cos, \sin \rangle = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ són <u>ortogonals</u>.

[<u>Nota</u>: podem fer el canvi $x = \frac{2\pi}{12}t$ i usar les fórmules per a $1, \cos x, \sin x$]

(b) Eq. normals:

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sin,\sin\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \cos,\cos\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1, H(t)\rangle \\ \langle \sin, H(t)\rangle \\ \langle \cos, H(t)\rangle \end{pmatrix}$$

Tenim $\langle 1,1\rangle = 6$ (nº punts).

$$\left.\begin{array}{l} \langle \sin,\sin\rangle = 3 \\ \langle \cos,\cos\rangle = 3 \end{array}\right\} \text{(nº punts/2)}.$$

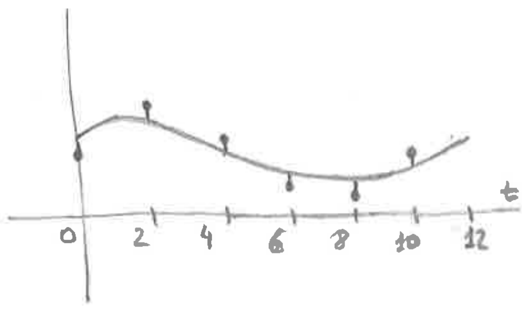
Calculem: $h_0 = \dfrac{\langle 1, H(t)\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \dfrac{5.6}{6}$, $\quad a_1 = \dfrac{\langle \sin, H(t)\rangle}{\langle \sin,\sin\rangle} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad a_2 = \dfrac{\langle \cos, H(t)\rangle}{\langle \cos,\cos\rangle} = \dfrac{0.8}{3}$.

$$p(t) = \frac{5.6}{6} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin \frac{2\pi}{12}t + 0.8 \cos \frac{2\pi}{12}t\right).$$

(c) $d_i = H(t_i) - p(t_i)$, $i = 0, \dots, 5$.

$$\sum_{i=0}^{5} d_i^2 = \langle H(t), H(t)\rangle - \frac{6}{2}\left(\frac{(2h_0)^2}{2} + a_1^2 + a_2^2\right) = 0.12$$

$\langle H(t), H(t)\rangle = 6.56$



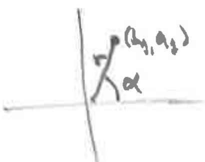
Desv. quadràtica mitjana: $\sqrt{\dfrac{0.12}{6}} = \underline{\underline{0.141421}}$

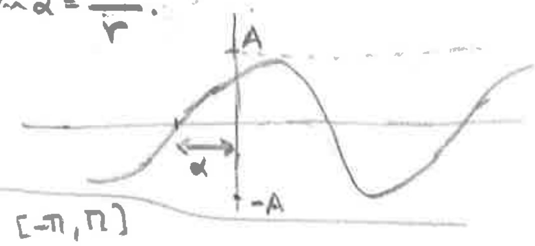
④ Trobeu la millor aproximació per mínims quadrats als punts $(-\frac{\pi}{2},1)$, $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$, $(\pi,1)$ i que sigui del tipus $f(\theta)=a+r\sin(\theta+\alpha)$ amb a, r reals i $\alpha\in[0,2\pi)$

Obs: sempre podem escriure $\boxed{a_1\cos\theta+b_1\sin\theta=r\sin(\theta+\alpha)}$

essent $r=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ (amplitud)

$\alpha\in[0,2\pi)$ amb $\cos\alpha=\dfrac{b_1}{r}$, $\sin\alpha=\dfrac{a_1}{r}$. (fase)





Per a la taula

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
F	1	0	1/2	1

← interval $[-\pi,\pi]$

busquem $f(\theta)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta$, millor aprox. per mínims quadrats

$$\longrightarrow \frac{a_0}{2}=\frac{\langle 1,F\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{1+0+\frac{1}{2}+1}{4}=\frac{5}{8}$$

$$a_1=\frac{\langle\cos\theta,F\rangle}{\langle\cos\theta,\cos\theta\rangle}=\frac{\cos(-\frac{\pi}{2})\cdot 1+\cos 0\cdot 0+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cos\pi\cdot 1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$b_1=\frac{\langle\sin\theta,F\rangle}{\langle\sin\theta,\sin\theta\rangle}=\frac{\sin(-\frac{\pi}{2})\cdot 1+\sin 0\cdot 0+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin\pi\cdot 1}{2}=-\frac{1}{4}$$

Obtenim: $f(\theta)=\bar{a}+\bar{r}\sin(\theta+\bar{\alpha})$,

amb $\boxed{\bar{a}=\frac{5}{8}}$, $\boxed{\bar{r}}=\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}=\boxed{0{,}559017}$

$\cos\alpha=\dfrac{-1/4}{r}$, $\sin\alpha=\dfrac{-1/2}{r}$

$\longrightarrow \operatorname{tg}\alpha=2\longrightarrow\alpha=$ arctg 2 (1r quadrant) → $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$
o
arctg 2 + π (3r quadrant) → $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha<0$

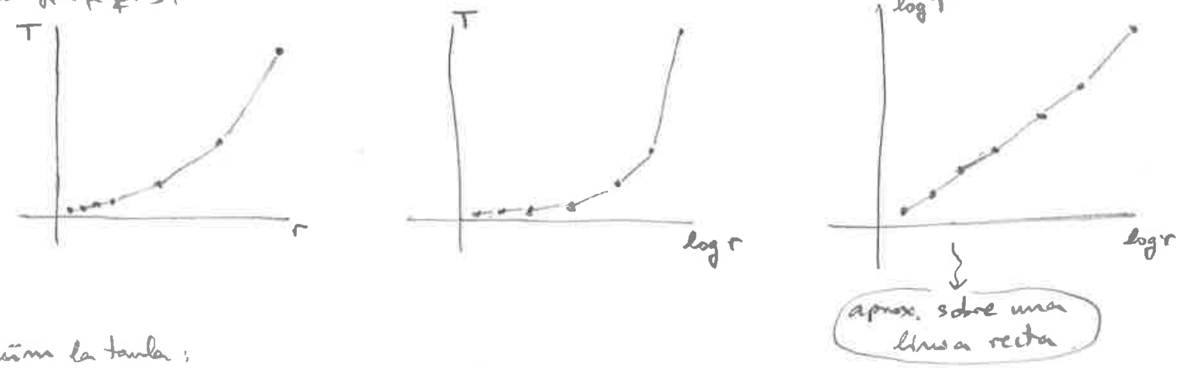
$\Rightarrow \boxed{\bar{\alpha}}=1{,}10715+\pi=\boxed{4{,}24874}$

(5) Per als set planetes més propers al Sol i usant mesures de Tycho Brahe, Kepler va obtenir una taula semblant a la següent:

r	60	110	150	230	780	1430	2870	milions de km
T	90	225	365	690	4330	10750	30650	dies

on r mesura la distància mitjana del planeta al Sol, i T el període orbital.
Useu aquests valors per a fer dibuixos de les gràfiques (r,T), $(\log r, T)$, etc... fins que trobeu que els resultats es disposin aproximadament en una línia recta. En cas que sigui així, useu la taula per a fer el "millor ajust" i determinar una fórmula que relacioni r i T.

Algunes gràfiques:



Construïm la taula:

$x = \log r$	4.09434	4.70048	5.01064	5.43808	6.65929	7.26543	7.96207
$y = \log T$	4.49981	5.41610	5.89990	6.53669	8.37332	9.28266	10.3304

Mitjançant la recta de regressió, buscarem una relació $y = a + bx$, és a dir $T = \alpha r^b$, amb $\alpha = e^a$

Sistema d'eqs. normals: $A^TA \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T b$, amb $A^TA = \begin{pmatrix} 7 & 41.1303 \\ 41.1303 & 254.065 \end{pmatrix}$, $A^T b = \begin{pmatrix} 50.3389 \\ 314.446 \end{pmatrix}$

Solució: $\left[\begin{array}{l} a = -1.65914 \longrightarrow \boxed{\alpha = e^a} = \boxed{0.190303} \\ \boxed{b = 1.50626} \end{array} \right] \longrightarrow$ tenim una fórmula $T = \alpha r^b$

De fet, la 3ª llei de Kepler estableix la fórmula $\underline{T = \text{const} \cdot r^{3/2}}$, i hem obtingut un exponent $b \simeq 3/2$.

6

(a) Donades les abscisses $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, determineu a, b i c per tal que els polinomis

$$\phi_0(x)=1, \quad \phi_1(x)=x+a, \quad \phi_2(x)=x^2+bx+c,$$

siguin ortogonals respecte d'ells.

(b) Amb els polinomis $\phi_i(x)$ obtinguts, trobeu c_0, c_1 i c_2 de manera que

$$p(x)=c_0\,\phi_0(x)+c_1\,\phi_1(x)+c_2\,\phi_2(x)$$

sigui la millor aproximació per mínims quadrats de la taula

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	0	3	4	0

(a)

$$0=\langle\phi_0,\phi_1\rangle=\langle 1,x\rangle+a\langle 1,1\rangle=0+5a.$$

$$\longrightarrow a=0 \longrightarrow \underline{\phi_1(x)=x}$$

$$0=\langle\phi_0,\phi_2\rangle=\langle 1,x^2\rangle+b\langle 1,x\rangle+c\langle 1,1\rangle=10+5c$$

$$0=\langle\phi_1,\phi_2\rangle=\langle x,x^2\rangle+b\langle x,x\rangle+c\langle x,1\rangle=10b$$

$$\longrightarrow c=-2,\ b=0 \longrightarrow \underline{\phi_2(x)=x^2-2}.$$

$\phi_1=x$	-2	-1	0	1	2
$\phi_0=1$	1	1	1	1	1
x^2	4	1	0	1	4
$\phi_2=x^2-2$	2	-1	-2	-1	2
f	0	0	3	4	0

* També podem usar la recurrència:

$$\phi_1(x)=(x-\beta_0)\,\phi_0(x)=x$$

$$\beta_0=\frac{\langle x,\phi_0^2\rangle}{\langle\phi_0,\phi_0\rangle}=\frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=0$$

$$\phi_2(x)=(x-\beta_1)\,\phi_1(x)-\gamma_1\,\phi_0(x)=x^2-2.$$

$$\beta_1=\frac{\langle x,\phi_1^2\rangle}{\langle\phi_1,\phi_1\rangle}=\frac{\langle x,x^2\rangle}{\langle x,x\rangle}=0, \quad \gamma_1=\frac{\langle\phi_1,\phi_1\rangle}{\langle\phi_0,\phi_0\rangle}=\frac{\langle x,x\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{10}{5}=2$$

(b) Sistema d'eqs. normals:

$$\begin{pmatrix}\langle\phi_0,\phi_0\rangle & & 0\\ & \langle\phi_1,\phi_1\rangle & \\ 0 & & \langle\phi_2,\phi_2\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\phi_0,f\rangle\\\langle\phi_1,f\rangle\\\langle\phi_2,f\rangle\end{pmatrix}$$

$$c_0=\frac{\langle\phi_0,f\rangle}{\langle\phi_0,\phi_0\rangle}=\frac{7}{5}, \quad c_1=\frac{\langle\phi_1,f\rangle}{\langle\phi_1,\phi_1\rangle}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}, \quad c_2=\frac{\langle\phi_2,f\rangle}{\langle\phi_2,\phi_2\rangle}=\frac{-10}{14}=-\frac{5}{7}.$$

$$p(x)=c_0\,\phi_0(x)+c_1\,\phi_1(x)+c_2\,\phi_2(x)=\underline{\underline{\frac{7}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{5}{7}(x^2-2)}}$$

(7)

La concentració a la sang d'un medicament, mesurat a intervals de 30 mn ve donada per la taula següent,

temps [mn]	30	60	90	120
concentració [mg/ℓ]	60.6	36.8	22.3	13.6

(a) Assumint que la concentració a la sang en un instant t es pot modelar per un procés de decaïment exponencial,

$$C_t = C_0 e^{-Kt},$$

ajusteu els paràmetres C_0 i K per mínims quadrats.

(b) Sabent que la vida mitjana d'una substància es defineix com el temps necessari per tal que la seva concentració disminueixi a la meitat, calculeu la vida mitjana d'aquesta substància.

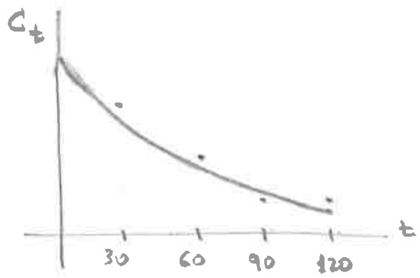
(c) Calculeu una base de polinomis ortogonals fins a grau 2 usant els temps donats a la taula.

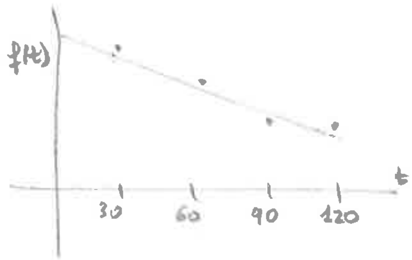
(a) Prenent logaritmes,

$$f(t) = \ln C_t = \ln C_0 - Kt = A + Bt, \quad \text{essent } A = \ln C_0, \ B = -K.$$

Ajustem A i B per mínims quadrats, prenent la base $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = t$ (recta de regressió)

t	30	60	90	120
$f(t)$	4.10429	3.60550	3.10459	2.61007





Sistema d'eqs. normals:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, f \rangle \\ \langle \varphi_1, f \rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 300 \\ 300 & 27000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.4244 \\ 932.080 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} A = 4.60201 \\ B = -0.0166120 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} C_0 = e^A = 99.6844 \ \text{mg}/\ell \ (\text{concentr. inicial}) \\ K = -B = 0.0166120 \ \text{mn}^{-1} \end{array} \right]$$

(b) Busquem t_m tal que $C_{t_m} = C_0/2 \longrightarrow e^{-Kt_m} = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{t_m = \frac{\ln 2}{K}} = \underline{41.7258 \text{ mn}}.$

(c) Usem la recurrència:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = 1 \\ \varphi_1(t) = (t - \beta_0)\varphi_0(t) = t - 75 \\ \varphi_2(t) = (t - \beta_1)\varphi_1(t) - \gamma_1 \varphi_0(t) = (t-75)^2 - 1125 = \\ \qquad = t^2 - 150t + 4500 \end{cases}$$

$$\beta_0 = \frac{\langle t, \varphi_0^2 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{300}{4} = 75$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\langle t, \varphi_1^2 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \dfrac{337500}{4500} = 75 \\ \gamma_1 = \dfrac{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \dfrac{4500}{4} = 1125 \end{cases}$$