INTRODUCCIÓ AL MÈTODE DELS ELEMENTS FINITS

Modelització i equacions diferencials

• Quan estudiem un fenomen o procés, sovint ve descrit per una funció d'una o diverses variables. A partir de lleis físiques, podem obtenir una modelització matemàtica del fenomen. Habitualment, la funció ha de ser solució d'una equació diferencial, i haurà de complir unes condicions addicionals (de contorn i/o inicials).

$$\boxed{\text{Fenomen o procés}} \xrightarrow{\text{modelització}} \boxed{\text{Eq. diferencial + condicions}}$$

funció?

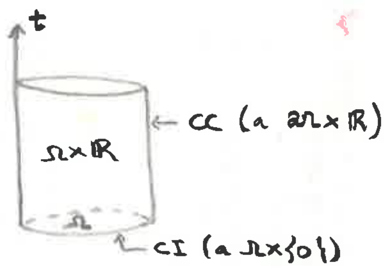
• Un "problema" consistirà en

- eq. diferencial
  - ordinària (EDO): involucra funció d'1 variable.
  - en derivades parcials (EDP): involucra funció de 2 o més variables.
- domini
- condicions
  - de contorn (CC): interacció amb el medi → Dirichlet, Neumann, mixtes,...
  - i/o
  - inicials (CI): estat a l'instant inicial

Podem tenir:

- problema estacionari (no depèn del temps)
  domini: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (variables d'espai)

- problema d'evolució (depèn del temps)
  domini: $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (variables d'espai i de temps)



Exemples de modelitzacions

- calor 1D o 2D
- elasticitat 1D

* Transferència de calor en una barilla

Considerem una barilla metàl·lica amb la superfície lateral aïllada (no es perd calor per convecció ni radiació)

→ la transferència de calor té lloc per conducció, al llarg de la direcció de x.

$\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$

Si la barilla és prou estreta, podem suposar que cada secció $x = \text{const.}$ té la mateixa temperatura en tots els seus punts.

$T(x,t)$ temperatura de la barrilla en el punt x i a l'instant t [°C]

$q(x,t)$ densitat de flux de calor: energia calorífica per unitat de temps, que travessa una unitat de superfície transversal $x = \text{const.}$ [W/m²]
($q>0$ si travessa en el sentit de x creixent) (W=J/s)

dades:

$A(x)$ àrea de la secció transversal [m²].

$f(x,t)$ font de calor: energia calorífica per unitat de temps i de volum, que es produeix a l'interior (p.ex. en un cable que condueix electricitat) [W/m³]

$\rho(x)$ densitat de massa [kg/m³]
$c(x)$ calor específica [J/kg·°C]
$k(x)$ conductivitat tèrmica [W/m·°C]
} depenen del material

Deduirem una eq. diferencial per a $T(x,t)$.

Fem balanç d'energia en un element de longitud dx, durant un temps dt.

L'increment d'energia és

$$\underbrace{q(x,t)\,A(x)\,dt}_{\text{entrada}} - \underbrace{q(x+dx,t)\,A(x+dx)\,dt}_{\text{sortida}} + \underbrace{f(x,t)\,\overbrace{A(x)\,dx}^{\text{volum}}\,dt}_{\text{gen. interna}} = c(x)\,\overbrace{\rho(x)A(x)\,dx}^{\text{massa}}\,\underbrace{(T(x,t+dt)-T(x,t))}_{\text{increment de temperatura}}$$

Dividint per $dx.dt$, i fent $dx\to 0$, $dt \to 0$, obtenim:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(qA) + fA = c\rho A\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$c\rho A\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qA) = fA$$

Apliquem la llei de Fourier: $\boxed{q(x,t) = -k(x)\frac{\partial T}{\partial x}}$ (la calor flueix de calent a fred)

Obtenim: $$\boxed{c\rho A\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) = fA}\ ,\ (*)$$

eq. de la calor 1D: és una EDP per a $T(x,t)$, que descriu l'evolució de la distribució de temperatures sobre la barrilla.

Sovint, només s'estudien solucions estacionàries de l'equació:

Si $T(x)$ és una solució que no depèn de t, i suposant $f = f(x)$,

$$\boxed{-\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) = fA}$$ EDO de 2on ordre

De fet, quan imposem CC constants a l'EDP (*), es pot veure que la solució és de la forma $T(x,t) = \underbrace{T_0(x)}_{\text{règim estacionari}} + \underbrace{\tilde{T}(x,t)}_{\text{règim transitori}}$, $\tilde{T}(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

⇒ després d'un temps prou gran, es pot suposar que la solució és la del règim estacionari (o estat d'equilibri).

Suposem ara que la barnilla perd calor per convecció a través de la superfície lateral (si el medi que l'envolta és un fluid, és el tipus principal d'intercanvi de calor; p.ex. aletes de refredament)

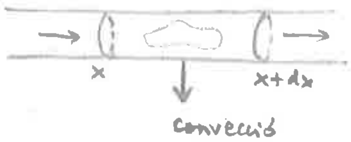
Per la llei de Newton de refredament per convecció, es suposa que el flux de calor cap al medi és proporcional a la diferència de temperatura amb el medi (a vegades es fan altres hipòtesis)

$T_\infty(x,t)$ temperatura del medi que envolta la barnilla [°C]

$\beta(x)$ coeficient de convecció $[W/m^2 \cdot °C]$

$p(x)$ perímetre de la secció transversal [m]

Al balanç d'energia, hi hem d'afegir la pèrdua per convecció:



$$-\underbrace{\beta(x)\cdot\left(T(x,t)-T_\infty(x,t)\right)}_{\text{dens. flux de convecció}}\ \underbrace{p(x)\,dx}_{\text{àrea sup. lateral}}\ dt$$

Obtenim l'EDP

$$\boxed{c\rho A\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\beta p\,(T-T_\infty)=fA}$$

amb CC, CI: $T(x,0)=T_0(x)$ temperatura inicial

En el cas estacionari, tenim l'EDO

$$\boxed{-\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right)+\beta p\,(T-T_\infty)=fA}$$

amb CC

Exemples (Dirichlet, Neumann, ...):

$T(0)=\bar{T}_0,\ T(L)=\bar{T}_L$ temp. als extrems

$T(0)=\bar{T}_0,\ \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=0$ temp. en un extrem i l'altre aïllat.

* Transferència de calor en una planxa

Si el gruix de la planxa es prou petit, podem suposar que la temperatura només depèn de (x,y) (i no de z)

$\Omega\subset\mathbb{R}^2$

$T(x,y,t)$ temperatura de la planxa en el punt (x,y) i a l'instant t. [°C]

$q_x(x,y,t)$ densitat de flux de calor en la direcció de x: energia calorífica per unitat de temps, que travessa una unitat de superfície transversal a la direcció x. $[W/m^2]$

$q_y(x,y,t)$ densitat de flux de calor en la direcció de y.

$H(x,y)$ gruix de la planxa. [m]

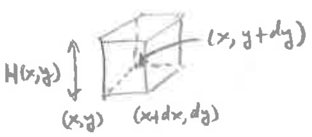
$k_x(x,y)$, conductivitat tèrmica en la direcció x $[W/m\cdot°C]$

$k_y(x,y)$ " " " " y

↳ si el material és isotròpic, llavors considerarem: $k_x(x,y)=k_y(x,y)=k(x,y)$

$f(x,y,t)$, $\rho(x,y)$, $c(x,y)$, $T_\infty(x,y,t)$, $\beta(x,y)$ com abans.

Balanç d'energia en un element $dx\,dy$, durant un temps dt:



$$q_x(x,y,t)\,H(x,y)\,dy\,dt-q_x(x+dx,y,t)\,H(x+dx,y)\,dy\,dt+$$
$$+q_y(x,y,t)\,H(x,y)\,dx\,dt-q_y(x,y+dy,t)\,H(x,y+dy)\,dx\,dt+$$
$$+f(x,y,t)\,H(x,y)\,dx\,dy\,dt-\beta(x,y)\left(T(x,y,t)-T_\infty(x,y,t)\right)dx\,dy\,dt=$$
$$=c(x,y)\,\rho(x,y)\,H(x,y)\,dx\,dy\cdot\left(T(x,y,t+dt)-T(x,y,t)\right)$$

Dividint per $dx\,dy\,dt$, i fent $dx \to 0$, $dy \to 0$, $dt \to 0$, obtenim:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(q_x H) - \frac{\partial}{\partial y}(q_y H) + f H - \beta (T - T_\infty) = c\rho H \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$c\rho H \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q_x H) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y H) + \beta (T - T_\infty) = f H$$

Per la llei de Fourier, $q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x}$, $q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y}$

$\longrightarrow$ EDP

$$c\rho H \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x H \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y H \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \beta (T - T_\infty) = f H$$

eq. de la calor 2D, per a $T(x,y,t)$.

En el cas estacionari, si $f = f(x,y)$,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x H \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y H \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \beta (T - T_\infty) = f H$$

EDP per a $T(x,y)$.

Si el gruix $H(x,y)$ és constant, podem escriure

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\beta}{H}(T - T_\infty) = f}$$

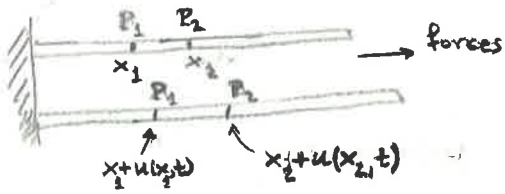
i en el cas isotròpic: $\quad -\operatorname{div}(k \nabla T) + \frac{\beta}{H}(T - T_\infty) = f$.

Les CC s'imposen a tota la frontera $\partial\Omega$.

* Deformacions longitudinals d'una barnilla elàstica.

Posició inicial

Posició deformada



$\Omega = [0,L]$

$u(x,t)$ desplaçament longitudinal del punt x del material respecte la posició inicial, a l'instant t. [m]

$\sigma(x,t)$ tensió: considerant que la secció $x = \text{const.}$ divideix la barnilla en 2 parts, és la tracció que una part fa sobre l'altra, per unitat de superfície [N/m²]

dades:

$A(x)$ àrea de la secció transversal [m²]

$F(x,t)$ forces que actuen sobre un punt x de la barnilla (p.ex. el pes en el cas d'una barnilla vertical) [N]

$\rho(x)$ densitat de massa [kg/m³]

$E(x)$ mòdul de Young o d'elasticitat: relació entre la tensió i l'allargament per unitat de longitud sofert per la barnilla [N/m²]

$f(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x}$ forces per unitat de longitud [N/m]

Fem balanç de les forces que actuen sobre un element de longitud dx,

$$\sigma(x+dx,t)\,A(x+dx) - \sigma(x,t)\,A(x) + F(x+dx,t) - F(x,t) = \overbrace{\rho(x)\,A(x)\,dx}^{\text{massa}} \cdot \overbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}^{\text{acceleració}}$$

(2ª llei de Newton)

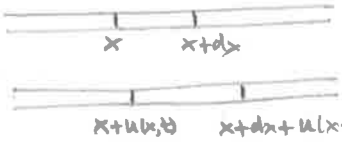
Dividint per dx, i fent $dx \to 0$, obtenim:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma A) + f = \rho A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\rho A \,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\sigma A) = f$$

Per la llei de Hooke, $\boxed{\sigma(x,t) = E(x)\cdot \frac{\partial u}{\partial x}}$ (σ : stress ; $\frac{\partial u}{\partial x}$: strain)

Obs: $\frac{\partial u}{\partial x}$ és l'allargament per unitat de longitud sofert per la barnilla



long. inicial: dx

long. deformada: $dx + u(x+dx,t) - u(x,t)$

$\downarrow$

allargament per unitat de longitud:

$$\frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} \xrightarrow{dx \to 0} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{[sense unitats]}$$

(tenim expansió si $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, contracció si $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$)

Obtenim l'EDP $\boxed{\rho A \,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f}$

+ CC

+ CI: $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$

desplaçament i impuls inicials

Si busquem solucions estacionàries $u(x)$, i suposem $f = f(x)$,

tenim l'EDO

$$\boxed{-\frac{d}{dx}\left(EA\,\frac{du}{dx}\right) = f} \quad \text{amb CC}$$

Exemple: $u(0) = 0$, $EA\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} = \overline{Q}_L$

extrem esquerre fixat, força $\overline{Q}_L$ a l'extrem dret

Equacis model i condicions de contorn.

* Per al cas d'un problema estacionari 1D, considerarem una equació model (o en forma autoadjunta), del tipus

$$\boxed{-\frac{d}{dx}\left(a_1(x)\frac{du}{dx}\right)+a_0(x)u=f(x)}\,, \qquad \begin{array}{|l} a_1(x), a_0(x), f(x) \text{ funcions donades.} \\ x\in(0,L) \end{array}$$

amb unes CC que imposarem en $x=0$ i $x=L$.

Les equacions dels problemes estacionaris 1D de calor i elasticitat, són d'aquesta forma.

- L'eq. model que hem considerat és una EDO lineal de 2on ordre. De fet, tota EDO lineal de 2on ordre

$$a(x)\frac{d^2u}{dx^2}+b(x)\frac{du}{dx}+c(x)u=g(x)\,, \quad \text{amb } a(x)\neq 0 \quad \forall x$$

($\longrightarrow$ "eq. el·líptica": $a(x)>0\ \forall x$, o bé $a(x)<0\ \forall x$)

es pot reescriure com l'eq. model:

Multiplicant per $-\frac{1}{a}e^{\int\frac{b}{a}}$, obtenim

$$\underbrace{-e^{\int\frac{b}{a}}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{b}{a}e^{\int\frac{b}{a}}\frac{du}{dx}}_{=\,-\frac{d}{dx}\left(e^{\int\frac{b}{a}}\frac{du}{dx}\right)}-\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}}u=-\frac{g}{a}e^{\int\frac{b}{a}}$$

$\searrow$ eq. model amb

$a_1=e^{\int\frac{b}{a}}$, $a_0=-\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}}$, $f=-\frac{g}{a}e^{\int\frac{b}{a}}$

- Def
  - variable primària : $u(x)$
  - variable secundària: $a_1(x)\frac{du}{dx}$

Usualment tenen significat físic, p. ex.:

* eq. calor. $-\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right)+\beta p(T-T_\infty)=fA$

$T(x)$ temperatura [°C]

$-kA\frac{dT}{dx}=qA$ flux (total) cap a la dreta [W].

* eq. elasticitat $-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)=f$

$u(x)$ desplaçament [m]

$EA\frac{du}{dx}=\sigma A$ força de tracció [N]

- Imposarem les condicions de contorn en $x=0$ i $x=L$.

En cada extrem, podem considerar:

- CC essencials (Dirichlet): $u(0) = \bar{U}_0 \,, \quad u(L) = \bar{U}_L$.
- CC naturals (Neumann):

$$-a_1(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = \bar{Q}_0 \,, \qquad a_1(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = \bar{Q}_L$$

(Nota: El signe és per considerar la derivada respecte la "normal exterior" al domini, $\left(a_1 \frac{du}{dx}\right)\cdot \vec{n}$

)

- combinació de CC essencials i naturals (Robin).

Significat físic de les CC naturals:

* eq. calor:

$$-kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = \bar{Q}_0 \,, \qquad kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = \bar{Q}_L$$

(flux cap a la dreta) (flux cap a l'esquerra) $\longrightarrow$ flux d'entrada en ambdós casos.

* eq. elasticitat:

$$-EA\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = \bar{Q}_0 \,, \qquad EA\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = \bar{Q}_L$$

$\longrightarrow$ força en el sentit de la coordenada x.

Mètodes numèrics per a EDOs i EDPs

A la pràctica, les EDOs i les EDPs no es poden resoldre explícitament (només en uns pocs casos, com les eq. lineals a coeficients constants).

Llavors, cal fer servir mètodes numèrics per obtenir la solució de manera aproximada.

Per resoldre un "problema" (eq. diferencial + condicions) per a $u(x)$, $x \in \Omega$, en general farem una discretització del domini: $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ nodes, i plantejarem un sistema lineal $N \times N$,
$$\begin{pmatrix} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \end{pmatrix},$$
que ens donarà la solució aproximada en cada node: $U_i \simeq u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$.

(Si volem la solució en un altre punt, podem usar interpolació a partir dels nodes).

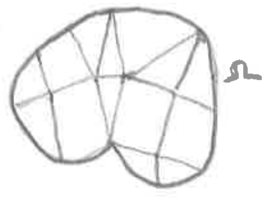
Per obtenir una bona aproximació, convé N gran i cal utilitzar ordinador per fer els càlculs.

En el cas de problemes d'evolució, primer fem un "tractament espacial" que ens permet veure les aproximacions $U_i(t) \simeq u(x_i, t)$ com a solució d'un sistema de N EDOs (amb cond. inicials), i després fem un "tractament temporal" consistent a aplicar algun mètode numèric per a EDOs (p.ex. el mètode d'Euler).

Entre els mètodes numèrics, tenim:

- diferències finites: s'aproximen les derivades a l'EDO o EDP per quocients de diferències.
- elements finits (FEM): es divideix el domini en subdominis senzills o elements (1D → intervals; 2D → triangles, rectangles, ...), i a cadascun hi apliquem un mètode variacional (aproximem la solució per una combinació lineal de funcions d'aproximació adequades), demanant també l'acoblament o encadellat de la solució de cada element.

Un avantatge del mètode dels elements finits és que es pot aplicar fàcilment a dominis complicats.



* Mètode de diferències finites

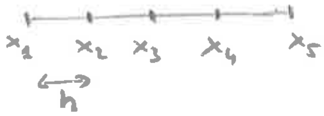
Exemple Volem resoldre $\begin{cases} -u''+4u=x \\ u(0)=0,\ u(1)=2 \end{cases} \rightsquigarrow u(x)?$

(problema 1D amb cond. de Dirichlet)

$\Omega=[0,1]$

Considerem nodes equiespaiats $x_1=0,\ x_2=0.25,\ x_3=0.5,\ x_4=0.75,\ x_5=1$,

increment: $h=0.25$



Volem trobar aproximacions $U_i \simeq u(x_i)$.

Aproximem u'' per un quocient de diferències: $u''(x) \simeq \dfrac{u(x-h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2}$ si h petit.

[es dedueix de la fórmula de Taylor:

$$u(x+h)=u(x)+u'(x)h+\frac{u''(x)}{2!}h^2+\frac{u'''(x)}{3!}h^3+\frac{u^{IV}(\xi_1)}{4!}h^4$$

$$u(x-h)=u(x)-u'(x)h+\frac{u''(x)}{2!}h^2-\frac{u'''(x)}{3!}h^3+\frac{u^{IV}(\xi_2)}{4!}h^4$$

$$\Rightarrow \frac{u(x-h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2}=u''(x)+\frac{u^{IV}(\xi_1)+u^{IV}(\xi_2)}{4!}h^2 \ ]$$

En cada node, s'ha de complir: $-u''(x_i)+4u(x_i)=x_i$, $i=2,3,4$ (nodes interns)

Llavors, demanem que les aproximacions U_i satisfacin:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{U_{i-1}-2U_i+U_{i+1}}{h^2}+4U_i=x_i,\quad i=2,3,4, \\ \text{i imposem les CC},\quad U_1=0,\quad U_5=2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{sistema lineal } 3\times3:$$

$$\begin{pmatrix} 2+4h^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2+4h^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2+4h^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}=h^2\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolent, obtenim les aproximacions

$$\left[\begin{array}{l} u(x_2)\simeq U_2=0.316468 \\ u(x_3)\simeq U_3=0.696429 \\ u(x_4)\simeq U_4=1.21925 \end{array}\right.$$

De fet, podem comparar amb la solució exacta:

$$u(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{7\sinh 2x}{\sinh 2}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} u(x_2)=0.313934 \\ u(x_3)=0.692047 \\ u(x_4)=1.21490 \end{array}\right. \quad (\simeq 2 \text{ xifres correctes})$$

Si prenem $n+1$ nodes (n subintervals), obtindrem un sistema lineal $(n-1)\times(n-1)$, amb matriu tridiagonal simètrica.

(El mètode també es pot adaptar a problemes 2D)

* Mètodes variacionals

Exemple.
$$\begin{cases} -u''+4u = x \\ u(0)=0, \quad u(1)=2 \end{cases}$$

Escollim una funció $u_0(x)$ que compleixi les CC, p.ex. $u_0(x)=2x$.

Llavors, la funció $v(x)=u(x)-u_0(x)$ compleix CC homogènies: $v(0)=v(1)=0$.

Donades unes funcions d'aproximació $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ que compleixin les CC homogènies, $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$, $i=1,\dots,n$, busquem una aproximació $u(x)\simeq U(x)=u_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\dots+c_n\varphi_n(x)$, amb $c_1,\dots,c_n$ coeficients a determinar per tal d'obtenir la "millor solució possible" entre les funcions d'aquest tipus.

P.ex., amb $n=2$ podem escollir $\varphi_1(x)=x(1-x)$, $\varphi_2(x)=x^2(1-x)$

$$\longrightarrow U(x)=2x+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x) = 2x+x(1-x)(c_1+c_2x) \quad (*)$$

Substituint a l'EDO, considerem el residu

$$R(x) = -U''(x)+4U(x)-x = 7x+c_1(-\varphi_1''+4\varphi_1)+c_2(-\varphi_2''+4\varphi_2) =$$
$$= 7x+c_1(2+4x-4x^2)+c_2(-2+6x+4x^2-4x^3)$$

Si imposem $R(x)\equiv 0 \longrightarrow \begin{cases} 2c_1-2c_2=0,\ 7+4c_1+6c_2=0,\ -4c_1+4c_2=0,\ -4c_2=0. \\ \text{sist. sobredeterminat} \Rightarrow \text{en general } \nexists \text{ sol. exacta del tipus } (*). \end{cases}$

Per intentar que el residu $R(x)$ sigui "petit", usem la propietat:

Donada una funció contínua $R(x)$, $x\in[a,b]$,
$$R(x)\equiv 0 \quad \forall x\in[a,b] \iff \underbrace{\int_a^b R(x)\,W(x)\,dx}_{\text{residu ponderat}} = 0 \text{ per a tota funció } \underbrace{W(x)}_{\text{funció pes}} \text{ contínua}$$

Com que no podem imposar $\int_0^1 R(x)\,W(x)\,dx=0$ per a tota funció $W(x)$, escollim n funcions pes $W_1(x),\dots,W_n(x)$ i imposem $\int_0^1 R(x)\,W_i(x)\,dx=0$, $i=1,\dots,n$
$\longrightarrow$ sistema lineal $n\times n$ per als $c_1,\dots,c_n$.

Cada mètode variacional correspon a una tria de funcions pes $W_1(x),\dots,W_n(x)$.

El mètode de Galerkin correspon a triar $W_i(x)=\varphi_i(x)$, $i=1,\dots,n$.

En l'ex. considerat, $W_1(x)=\varphi_1(x)=x(1-x)$, $W_2(x)=\varphi_2(x)=x^2(1-x)$

$$\int_0^1 R(x)\,\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 7x\,\varphi_1\,dx + c_1\int_0^1(-\varphi_1''+4\varphi_1)\,\varphi_1\,dx + c_2\int_0^1(-\varphi_2''+4\varphi_2)\,\varphi_1\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 R(x)\,\varphi_2(x)\,dx = \int_0^1 7x\,\varphi_2\,dx + c_1\int_0^1(-\varphi_1''+4\varphi_1)\,\varphi_2\,dx + c_2\int_0^1(-\varphi_2''+4\varphi_2)\,\varphi_2\,dx = 0.$$

Sistema lineal:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = \int_0^1 (-\varphi_j'' + 4\varphi_j)\varphi_i \, dx$$
$$b_i = -\int_0^1 7x\,\varphi_i \, dx$$

Calculem
$$a_{11} = \int_0^1 (-\varphi_1'' + 4\varphi_1)\varphi_1 \, dx = \int_0^1 (2+4x-4x^2)\,x(1-x)\,dx = \frac{2}{6} + \frac{4}{12} - \frac{4}{20} = \frac{7}{15}$$
$$a_{12} = \int_0^1 (-\varphi_2'' + 4\varphi_2)\varphi_1 \, dx = \int_0^1 (-2+6x+4x^2-4x^3)\,x(1-x)\,dx = -\frac{2}{6} + \frac{6}{12} + \frac{4}{20} - \frac{4}{30} = \frac{7}{30}$$
$$a_{21} = \int_0^1 (-\varphi_1'' + 4\varphi_1)\varphi_2 \, dx = \int_0^1 (2+4x-4x^2)\,x^2(1-x)\,dx = \frac{2}{12} + \frac{4}{20} - \frac{4}{30} = \frac{7}{30}$$
$$a_{22} = \int_0^1 (-\varphi_2'' + 4\varphi_2)\varphi_2 \, dx = \int_0^1 (-2+6x+4x^2-4x^3)\,x^2(1-x)\,dx = -\frac{2}{12} + \frac{6}{20} + \frac{4}{30} - \frac{4}{42} = \frac{6}{35}$$
$$b_1 = -\int_0^1 7x\,\varphi_1 \, dx = -7\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = -\frac{7}{12}$$
$$b_2 = -\int_0^1 7x\,\varphi_2 \, dx = -7\int_0^1 x^3(1-x)\,dx = -\frac{7}{20}$$

hem usat:
$$\int_0^1 x^k(1-x)\,dx = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Solució:
$$c_1 = -0{,}717391 = -\frac{33}{46}$$
$$c_2 = -1{,}06522 = -\frac{49}{46}$$
$\longrightarrow$ Aproximació:
$$u(x) \simeq U(x) = 2x - x(1-x)(0.717391 + 1.06522\,x)$$

Avaluem en alguns punts:
$$U(0{,}25) = 0.315557$$
$$U(0{,}5) = 0{,}687500$$
$$U(0{,}75) = 1.21569$$

Obs. La matriu A és simètrica, ja que
$$a_{ij} = \int_0^1 (-\varphi_j'' + 4\varphi_j)\varphi_i \, dx = -\int_0^1 \varphi_j''\varphi_i \, dx + 4\int_0^1 \varphi_j\varphi_i \, dx = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' \, dx + 4\int_0^1 \varphi_i\varphi_j \, dx$$
$$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

integrant per parts:
$$\int_0^1 \varphi_j''\varphi_i \, dx = \underbrace{\left[\varphi_j'\varphi_i\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \varphi_j'\varphi_i' \, dx$$
$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$

Això ens dóna una variant del mètode de Galerkin, amb la qual tenim directament una matriu simètrica.

(1) Considerem el problema $\begin{cases} u'' - u = x, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2 \end{cases}$

Useu el mètode de Galerkin per a trobar una aproximació a la solució d'aquest problema que sigui de la forma
$$U(x) = 2x + c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x)$$

Notem que $u_0(x) = 2x$ satisfà les CC: $u_0(0) = 0, u_0(1) = 2$.

Llavors, estem escrivint $U(x) = 2x + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, amb funcions d'aproximació $\varphi_1(x) = x(1-x)$, $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$, que satisfan CC homogènies: $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$, $i = 1,2$.

Residu: $R(x) = U''(x) - U(x) - x = (c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'') - (2x + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) - x =$
$= -3x + c_1(\varphi_1'' - \varphi_1) + c_2(\varphi_2'' - \varphi_2)$

Segons el mètode de Galerkin, cal determinar c_1, c_2 imposant el sistema:

$$\begin{cases} 0 = \int_0^1 R(x)\varphi_1(x)\,dx = -3\int_0^1 x\varphi_1\,dx + c_1\int_0^1(\varphi_1'' - \varphi_1)\varphi_1\,dx + c_2\int_0^1(\varphi_2'' - \varphi_2)\varphi_1\,dx \\ 0 = \int_0^1 R(x)\varphi_2(x)\,dx = -3\int_0^1 x\varphi_2\,dx + c_1\int_0^1(\varphi_1'' - \varphi_1)\varphi_2\,dx + c_2\int_0^1(\varphi_2'' - \varphi_2)\varphi_2\,dx \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{essent } a_{ij} = \int_0^1 (\varphi_j'' - \varphi_j)\varphi_i\,dx, \quad b_i = 3\int_0^1 x\varphi_i\,dx$$

Calculem les integrals, amb $\varphi_1 = x(1-x)$, $\varphi_1'' - \varphi_1 = -2 - x + x^2$
$\varphi_2 = x^2(1-x)$, $\varphi_2'' - \varphi_2 = 2 - 6x - x^2 + x^3$

i obtenim: $a_{11} = -\frac{11}{30}$, $a_{12} = a_{21} = -\frac{11}{60}$, $a_{22} = -\frac{1}{7}$ $\leftarrow$ podem usar: $\int_0^1 x^k(1-x)\,dx = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
$b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{3}{20}$.

Resolent el sistema, $c_1 = -\frac{207}{473} = -0.437632$, $c_2 = -\frac{21}{43} = -0.488372$

Aproximació: $\boxed{U(x) = 2x - 0.437632\, x(1-x) - 0.488372\, x^2(1-x)}$

Podem comparar amb la solució exacta: $u(x) = -x + \frac{3\sinh x}{\sinh 1}$

Avaluant en alguns punts,

x	$u(x)$	$U(x)$
0.25	0.394857	0.395052
0.5	0.830228	0.829545
0.75	1.34917	1.34927

(2) Idem, de la forma $\bar{U}(x) = 2x + d_1 x(1-x) + d_2 x(1-x)^2$.

En aquest cas, usem les funcions d'aproximació $\psi_1(x) = x(1-x)$, $\psi_2(x) = x(1-x)^2$, que satisfan les CC homogènies: $\psi_i(0) = \psi_i(1) = 0$, $i = 1,2$

Residu: $\bar{R}(x) = \bar{U}''(x) - \bar{U}(x) - x = -3x + d_1(\psi_1'' - \psi_1) + d_2(\psi_2'' - \psi_2)$.

Imposant $\int_0^1 \bar{R}(x)\psi_i(x)\,dx = 0$, $i=1,2$, hem de resoldre el sistema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$,

essent $a_{ij} = \int_0^1 (\psi_j'' - \psi_j)\psi_i\,dx$, $b_i = 3\int_0^1 x\psi_i\,dx$, $\left[\begin{array}{l} \psi_1'' - \psi_1 = -2 - x + x^2 \\ \psi_2'' - \psi_2 = -4 + 5x + 2x^2 - x^3 \end{array}\right.$

Tenim: $a_{11} = -\frac{11}{30}$, $a_{12} = a_{21} = -\frac{11}{60}$, $a_{22} = -\frac{1}{7}$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{1}{10}$ $\leftarrow$ usant: $\int_0^1 x^k(1-x)\,dx = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $\int_0^1 x^k(1-x)^2\,dx = \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

Resolent el sistema, $d_1 = -\frac{438}{473} = -0.926004$, $d_2 = \frac{21}{43} = 0{,}488372$

Aproximació: $\boxed{\bar{U}(x) = 2x - 0.926004\, x(1-x) + 0{,}488372\, x(1-x)^2}$

Avaluant,

x	$\bar{U}(x)$
0,25	0,395052
0,5	0,829545
0,75	1,34927

$\rightsquigarrow$ coincideixen amb els valors $U(x)$ del probl. anterior.

(3) Compareu les funcions $U(x)$ i $\bar{U}(x)$ dels dos problemes anteriors i comenteu el resultat.

Les aproximacions coincideixen: $U(x) = \bar{U}(x)$, $\forall x \in [0,1]$.
Això és degut al fet que les funcions d'aproximació (també usades com a funcions pes) en els dos casos generen el mateix espai de polinomis, ja que $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$
Llavors els coeficients estan relacionats: $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = d_1\psi_1 + d_2\psi_2 \rightsquigarrow d_1 = c_1 + c_2$, $d_2 = -c_2$

(4) Calculeu els coeficients c_1 i c_2 del mateix problema, usant com a pesos les funcions 1 i x a les integrals amb pes.

$U(x) = 2x + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, amb funcions d'aproximació $\varphi_1(x) = x(1-x)$, $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$.
Residu: $R(x) = U''(x) - U(x) - x = -3x + c_1(\varphi_1'' - \varphi_1) + c_2(\varphi_2'' - \varphi_2)$
Amb les funcions pes $w_1(x) = 1$, $w_2(x) = x$, imposem: $\int_0^1 R(x)w_1(x)\,dx = 0$, $\int_0^1 R(x)w_2(x)\,dx = 0$

Això ens dóna el sistema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, essent $\left[\begin{array}{l} a_{ij} = \int_0^1 (\varphi_j'' - \varphi_j)w_i\,dx \\ b_i = 3\int x w_i\,dx \end{array}\right.$

Tenim: $a_{11} = -\frac{13}{6}$, $a_{12} = a_{21} = -\frac{13}{12}$, $a_{22} = -\frac{21}{20}$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = 1$

Resolent, $c_1 = -\frac{354}{793} = -0{,}446406$, $c_2 = -\frac{30}{61} = -0{,}491803$

Aproximació: $U(x) = 2x - 0{,}446406\, x(1-x) - 0{,}491803\, x^2(1-x)$

Avaluant en alguns punts,

x	$U(x)$
0,25	0,393246
0,5	0,826923
0,75	1,34714