FORMES NORMALS HAMILTONIANES

Nocions bàsiques de sistemes hamiltonians

- Un sistema hamiltonià (amb n graus de llibertat) és un sistema de 2n EDOs de la forma

$$\begin{cases} \dot q_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}(q,p,t) \\ \dot p_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}(q,p,t), \quad j=1,\dots,n \end{cases} \qquad (1)$$

que ve donat per un hamiltonià o funció hamiltoniana $H: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, almenys de classe C^2.
(si H no depèn de t, el sistema hamiltonià és autònom)

- Exemple clàssic: sistema conservatiu a $\mathbb{R}^n$.

$V(q) = V(q_1,\dots,q_n)$ potencial $\rightsquigarrow m\ddot q = -\nabla V(q)$, sistema de n EDOs de 2on ordre.

Prenent $p = m\dot q$, tenim el hamiltonià $H(q,p) = \dfrac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$
(energia total)

- Notació més compacta per al sistema (1):

$$\boxed{\dot x = X_H(x,t)} = J\nabla H(x,t), \quad x=(q,p) \qquad (2)$$

essent $\nabla H(x,t) = \nabla_x H(x,t) = \left(\dfrac{\partial H}{\partial q}(q,p,t), \dfrac{\partial H}{\partial p}(q,p,t)\right)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \text{ matriu } 2n\times 2n \qquad (J^T = J^{-1} = -J)$$

El camp vectorial X_H s'anomena camp hamiltonià.

- Parèntesi de Poisson. $F(x,t)$, $G(x,t)$ funcions,

def $$\{F,G\}(x,t) = \nabla F(x,t)^T \cdot J \cdot \nabla G(x,t) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)$$

Permet estudiar com evoluciona una funció $F(x,t)$ sobre una trajectòria $x(t)$ del sistema hamiltonià (1) o (2):

$$\frac{d}{dt}F(x(t),t) = \{F,H\}(x(t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x(t),t).$$

Definint la funció $(\mathcal{L}_H F)(x,t) = \{F,H\} + \dfrac{\partial F}{\partial t}$ (derivada de Lie),

podem escriure $\dot F = \mathcal{L}_H F$.

En el cas autònom, deduïm que F és integral primera $\Longleftrightarrow \{F,H\}\equiv 0$,
i per tant $H(x)$ sempre és integral primera ($\dot H \equiv 0$, conservació de l'energia)

- <u>Aplicacions simplèctiques</u>

Si al sistema hamiltonià (2) li apliquem una transformació o canvi de coordenades, $x = \varphi(y)$, es transforma en el sistema $\dot{y} = D\varphi(y)^{-1} X_H(\varphi(y),t)$, el qual en general no serà hamiltonià.

<u>Def.</u> Una aplicació $\varphi : V \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ de classe C^1 és <u>simplèctica</u> o <u>canònica</u> si
$$\boxed{D\varphi(y)^T J \cdot D\varphi(y) = J,} \quad \forall y \in V \qquad (3)$$

Les transformacions simplèctiques són les que conserven l'estructura de les equacions hamiltonianes: donat el sistema (2), aplicant una transformació $x = \varphi(y)$ simplèctica, obtenim un altre sistema hamiltonià
$$\dot{y} = X_{H^*}(y,t), \quad \text{amb } \boxed{H^* = H \circ \varphi}, \quad \text{és a dir } H^*(y,t) = H(\varphi(y),t)$$
Llavors les noves coordenades $y \in V$ s'anomenen <u>coordenades simplèctiques</u>.
Les transformacions simplèctiques també conserven el parèntesi de Poisson: $\boxed{\{F\circ\varphi, G\circ\varphi\} = \{F,G\}\circ\varphi}$.
Si en comptes de (3) es compleix que $\exists \mu \in \mathbb{R}$: $\mu \cdot D\varphi(y)^T J \cdot D\varphi(y) = J \quad \forall y \in V$ (una "aplicació simplèctica <u>amb multiplicador μ</u>"), llavors el nou sistema també és hamiltonià, amb $H^* = \mu \cdot H \circ \varphi$. (útil quan volem fer canvis d'escala en les variables)

- <u>Flux hamiltonià</u> Donat el sistema (2), el seu flux $\varphi_{t_0,t}(x) = \varphi(t_0,t,x)$ ve definit perquè $\varphi(t_0,\cdot,x)$ és la solució que compleix la cond. inicial $\varphi(t_0,t_0,x) = x$.
Si H és C^r, $r \geq 2$, llavors el camp X_H és C^{r-1} i el flux φ també és C^{r-1}.
Podem escriure:
$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{t_0,t} = X_H \circ \varphi_{t_0,t} \\ \varphi_{t_0,t_0} = id \end{cases}$$
Una propietat important dels sistemes hamiltonians és que el flux $\varphi_{t_0,t}$ és una aplicació simplèctica en el seu domini, $\forall t_0, t$.

- <u>Matrius hamiltonianes i simplèctiques.</u>

Def. Una matriu B és <u>hamiltoniana</u> (o infinitesimalment simplèctica) si es pot escriure en la forma $B = JS$, amb S simètrica ($\Longleftrightarrow B^T J + JB = 0$)
Una matriu A és <u>simplèctica</u> si $A^T J A = J$.

Es compleix: $\left[\begin{array}{l} B \text{ hamiltoniana} \Rightarrow \operatorname{tr} B = 0 \\ A \text{ simplèctica} \Rightarrow \det A = 1 \end{array}\right\}$ (per a $n=1$, són "$\Longleftrightarrow$")

Per a un sistema hamiltonià $\dot{x} = X_H(x)$, la matriu $DX_H(x) = J \cdot D^2 H(x)$ és hamiltoniana $\forall x$, i per tant deduïm que $\operatorname{div} X_H(x) = 0 \quad \forall x$.
Una aplicació φ és simplèctica quan la matriu $D\varphi(x)$ és simplèctica $\forall x$, i per tant tenim $\det D\varphi(x) = 1 \quad \forall x$. Deduïm que tota aplicació simplèctica és un difeomorfisme local, i conserva volum (i orientació).

El següent resultat dóna les possibles configuracions de valors propis per a matrius hamiltonianes i simplèctiques.

Proposició.
a) B hamiltoniana
Si λ vap de $B \Rightarrow -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ vaps de B, amb la mateixa multiplicitat.
Si 0 és vap de B, té multiplicitat parella.
b) A simplèctica
Si μ vap de $A \Rightarrow \frac{1}{\mu}, \bar{\mu}, \frac{1}{\bar{\mu}}$ vaps de A, amb la mateixa multiplicitat.
Si 1 o -1 són vaps de A, tenen multiplicitat parella.

- Estabilitat de sistemes hamiltonians lineals

Una funció quadràtica $H(x) = \frac{1}{2} x^T S x$, amb S simètrica $2n \times 2n$, dóna lloc a un sistema hamiltonià lineal (autònom):

$$\dot{x} = Bx, \quad \text{amb} \quad B = J \cdot S$$

Com a corol·lari de la proposició anterior, per a un sist. hamilt. lineal podem dir:
- no és mai asimptòticament estable.
- és estable $\Leftrightarrow$ tots els vaps de B són imaginaris purs, i B és diagonalitzable.

- Punts crítics de sistemes hamiltonians no lineals, estabilitat.

$H : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ hamiltonià.
$\dot{x} = X_H(x) = J \cdot \nabla H(x)$ sistema hamiltonià (autònom)
Un punt $x^0 \in \mathcal{U}$ és punt d'equilibri $\Leftrightarrow \nabla H(x^0) = 0$ (punt crític de H)

* Teorema de Dirichlet
Si x^0 és un mínim o màxim local (aïllat) de H, aleshores és un punt crític estable (en sentit de Lyapunov)

Ho podrem aplicar quan la matriu $D^2H(x^0)$ sigui definida positiva o negativa.

* En general, per estudiar l'estabilitat d'un punt crític x^0 del sistema $\dot{x} = X_H(x)$, convé considerar el sistema linealitzat en x^0:

$$\boxed{\dot{x} = DX_H(x^0) \cdot (x - x^0)}$$

Els valors propis de $DX_H(x^0) = J\, D^2H(x^0)$ (matriu hamiltoniana) reben el nom d'exponents característics de X_H en x^0.
Condició necessària: si x^0 és estable $\Rightarrow$ tots els exponents característics són imaginaris purs: $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$.
En aquest cas, diem que tenim un punt d'equilibri el·líptic.
El recíproc és fals; quan els exp. característics són imaginaris purs, el sistema linealitzat té x^0 com a punt crític estable, però en general no podem decidir si H té x^0 com a punt estable o inestable tenint en compte només el sistema linealitzat (llevat que puguem aplicar el teo. de Dirichlet)

* Considerem el cas d'un punt d'equilibri el·líptic, podem suposar $x^0=0$ i $H(0)=0$.

Proposició. Si els exponents característics $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$ són tots simples, aleshores fent un canvi simplèctic lineal el hamiltonià es pot escriure en la forma

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots,$$

amb $H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j (q_j^2 + p_j^2)$, i cada H_m és un polinomi homogeni de grau m.

($\omega_1, \dots, \omega_n$ són les freqüències característiques, amb signes ben determinats).

En un entorn $B_r(0)$, podem veure H com una petita pertorbació de $H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j (q_j^2 + p_j^2) \rightsquigarrow \begin{cases} \dot q_j = \omega_j p_j \\ \dot p_j = -\omega_j q_j, \quad j=1,\dots,n \end{cases}$

sistema de n oscil·ladors harmònics, de freqüències $\omega_1, \dots, \omega_n$.

El hamiltonià H_2 és un exemple de sistema integrable.

Si fem el canvi simplèctic $\begin{cases} q_j = \sqrt{2I_j}\,\sin\phi_j \\ p_j = \sqrt{2I_j}\,\cos\phi_j, \quad j=1,\dots,n, \end{cases}$

obtenim $H_2(\phi, I) = \omega_1 I_1 + \dots + \omega_n I_n = \langle \omega, I\rangle$, en les coordenades $(\phi, I) = (\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$,

essent $\begin{cases} I_j \geq 0 \quad \to \text{accions}: \; I_j = \frac{1}{2}(q^2+p^2) \\ \phi_j \in S^1 \text{ (}2\pi\text{-periòdiques)} \to \text{angles} \end{cases}$

$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in S^1 \times \dots \times S^1 = \mathbb{T}^n$, tor n-dimensional

En aquestes variables, les equacions hamiltonianes són

$$\begin{cases} \dot\phi_j = \omega_j \\ \dot I_j = 0, \quad j=1,\dots,n \end{cases} \longrightarrow (\phi(t), I(t)) = (\phi^0 + t\omega, I^0)$$

Com veiem, per al hamiltonià H_2 tenim $I_1, \dots, I_n$ com a integrals primeres, i per tant tots els conjunts $\mathcal{Z}_{I^0} = \{(\phi, I) : I = I^0, \; \phi \in \mathbb{T}^n\}$ són invariants $\to$ tors invariants n-dimensionals.

Nota: les coordenades (ϕ, I) no estan ben definides quan alguna $I_j^0 = 0$; de fet sobre aquests plans tenim tors invariants de dim. $< n$.

- Integrabilitat completa, variables angle-acció.

Un hamiltonià $H(x)$ amb n graus de llibertat s'anomena (completament) integrable si té n integrals primeres $F_1, F_2, \dots, F_n$, independents ($\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_n(x)$ lin. indep. $\forall x$) i en involució ($\{F_j, F_l\} \equiv 0 \quad \forall j, l = 1, \dots, n$). Òbviament podem prendre $F_1 = H$.

Però l'existència d'aquestes integrals primeres definides globalment és una propietat molt restrictiva, amb fortes implicacions topològiques, i que permet una descripció completa de l'estructura de les trajectòries del sistema.

Teorema de Liouville-Arnold ([ArnoldKN, §5.1.2])

Siguin $F_1 = H, F_2, \dots, F_n : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions independents i en involució. Donades constants $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, denotem $M_c = \{x \in \mathcal{U} : F_j(x) = c_j,\ j = 1, \dots, n\}$, i suposem que és un conjunt connex. Aleshores,

a) M_c és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^{2n}$, de dim. n, invariant per tots els fluxos associats als camps hamiltonians X_{F_j}.

b) Si cada camp hamiltonià X_{F_j} és complet sobre M_c (trajectòries definides $\forall t \in \mathbb{R}$), llavors M_c és difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ per a cert $0 \le k \le n$.

c) En les condicions de (b), el flux sobre M_c del hamiltonià $H = F_1$ és de tipus lineal: en les variables $(\varphi, y) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ induïdes pel difeo., ve donat per $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{y} = \nu$, essent $\omega = \omega(c)$, $\nu = \nu(c)$.

El cas més interessant el tenim quan la varietat M_c és compacta. En aquest cas, sempre es complirà que tot camp vectorial és complet sobre M_c (no cal suposar-ho), i obtenim M_c difeomorfa a $\mathbb{T}^n$, amb un flux lineal o quasiperiòdic donat per $\dot{\varphi} = \omega$.

Teorema ([ArnoldKN, §5.2.1])

En les condicions del teorema anterior, i suposant M_c compacta, $\exists$ un entorn $V \supset M_c$ difeomorf a $\mathbb{T}^n \times G$, $G \subset \mathbb{R}^n$, i coordenades simplèctiques $(\phi, I) \in \mathbb{T}^n \times G$, en les quals el hamiltonià és de la forma $\boxed{H = h(I)}$

Les (ϕ, I) s'anomenen variables angle-acció, i les equacions hamiltonianes en aquestes variables són
$$\begin{cases} \dot{\phi}_j = \omega_j(I) = \dfrac{\partial h}{\partial I_j}(I), \\ \dot{I}_j = 0. \end{cases}$$

D'aquesta manera totes les trajectòries es troben sobre tors invariants n-dimensionals $\mathcal{T}_{I^0} = \mathbb{T}^n \times \{I^0\}$, i sobre cada tor tenim un flux quasiperiòdic donat per un vector de freqüències $\omega(I^0) = (\omega_1(I^0), \dots, \omega_n(I^0)) = \nabla h(I^0)$. L'aplicació $\omega : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida per $\omega(I) = \nabla h(I)$ rep el nom d'aplicació freqüència.

A la pràctica, la construcció de les variables angle-acció d'un hamiltonià integrable resulta força complicada (per exemple, per al problema de 2 cossos vegeu [MeyerH, §IV.E])

En realitat, els exemples de hamiltonians integrables són escassos. Ara bé, hi ha molts exemples importants que poden ser considerats com una petita pertorbació d'un hamiltonià integrable:

$$H(\phi, I, \varepsilon) = h(I) + \varepsilon f(\phi, I),$$ hamiltonià quasi-integrable.

Idees generals sobre formes normals hamiltonianes

En l'estudi dels sistemes hamiltonians, sovint s'intenta simplificar l'expressió de la funció hamiltoniana H construint una transformació simplèctica Φ tal que el nou hamiltonià $H^* = H \circ \Phi$ tingui l'expressió més senzilla possible, que anomenarem <u>forma normal</u>.

Donat un hamiltonià quasi-integrable $H_\varepsilon = h + \varepsilon f$, tenim la part integrable h com a primera aproximació molt fàcil d'estudiar. No obstant, fins i tot per a ε petit el comportament de les trajectòries de H_ε pot ser bastant diferent de les de h. Així, en el hamiltonià integrable h totes les trajectòries són contingudes en tors invariants i per tant són estables (en el sentit de fitades), cosa que en general no es complirà per al hamiltonià pertorbat H_ε si $\varepsilon \neq 0$.

Les formes normals són una eina bàsica en la <u>teoria de pertorbacions</u>, permetent millorar la informació donada per la part integrable. Per al hamiltonià H_ε, construirem una transformació simplèctica Φ_ε mitjançant desenvolupaments en ε, en principi formals, que no sempre seran convergents. Malgrat això, menyspreant de $H_\varepsilon^* = H_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$ els termes a partir de cert ordre, obtindrem una <u>forma normal truncada</u> N_ε que es troba a mig camí entre h i H_ε, en el sentit que constitueix una aproximació del hamiltonià H_ε millor que la part integrable h, i per tant dóna més informació, i d'altra banda té encara una expressió prou senzilla per establir-ne les propietats.

Funcions generatrius de transformacions simplèctiques

L'obtenció d'una transformació $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{2n}(x))$ que sigui simplèctica i que, a més, permeti simplificar l'expressió del hamiltonià, no és una tasca simple, ja que la condició $D\Phi(x)^T J \, D\Phi(x) = J$ comporta restriccions complicades sobre les $2n$ funcions $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n}$. No obstant, veurem que és possible generar transformacions simplèctiques a partir d'<u>una única</u> funció escalar.

- El mètode clàssic per obtenir transformacions simplèctiques $(Q,P) = \Phi(q,p)$ utilitza <u>funcions generatrius de variables mixtes</u>, que poden ser de diversos tipus: $S(q,P)$, $S(q,Q)$, etc. (vegeu una exposició completa a [ArnoldKN, §1.3.2])

  Per exemple, una transformació simplèctica Φ tal que $\det \frac{\partial P}{\partial p}(q^0,p^0) \neq 0$ admet, en un entorn de (q^0, P^0), una funció generatriu $S(q,P)$ de manera que Φ ve definida implícitament per les equacions

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,P), \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P}(q,P) \qquad (*)$$

Notes

1) Aquest mètode no proporciona una fórmula explícita per a la transformació $(Q,P)=\Phi(q,p)$, ja que barreja variables antigues i noves. Caldria resoldre les equacions implícites (*), en general bastant complicades.

2) La funció generatriu $S_0(q,P)=P^T q = P_1 q_1 + \dots + P_n q_n$ correspon a $\varphi_0 = id$. Llavors una transformació simplèctica propera a la identitat, $\Phi_\varepsilon = id + O(\varepsilon)$, vindrà donada per una funció generatriu $S(q,P,\varepsilon) = P^T q + O(\varepsilon)$

3) El principal avantatge d'aquest mètode és que permet construir transformacions simplèctiques no properes a la identitat (és a dir, fora de la teoria de pertorbacions). Fins i tot en alguns casos permet construir variables angle-acció (vegeu p.ex. [LochakM, ap.6]).

Transformades de Lie: formulació i variants

Una altra tècnica per a generar una transformació simplèctica és considerar-la com el flux d'un hamiltonià adequat.

- La formulació més simple és la següent:

Donada una funció $W(x)$, definim la transformació simplèctica $x=\Phi(y,\varepsilon)$, essent $\Phi(\cdot,\varepsilon)=\varphi_{0,\varepsilon}$ el flux temps ε de X_W. Naturalment, per a conèixer explícitament $\varphi(\cdot,\varepsilon)$ caldria resoldre les equacions hamiltonianes associades a W. Però si el paràmetre ε és petit, la transformació $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ és propera a la identitat, i podem aproximar-la mitjançant un desenvolupament en potències de ε, anomenat sèrie de Lie. Donada una funció $F(x)$,

$$T_\varepsilon F = F\circ\Phi(\cdot,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \delta^m}\Big|_{\delta=0} (F\circ\varphi_{0,\delta}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} \mathcal{L}_W^m F =$$

$$\mathcal{L}_W F = \{F,W\}$$

$$= F + \varepsilon\{F,W\} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\{\{F,W\},W\} + \cdots$$

Així doncs, estem veient $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ com una transformada entre funcions, $F(x) \rightsquigarrow (T_\varepsilon F)(y) = F\circ\Phi(y,\varepsilon)$ (transformada de Lie). Aplicarem aquesta transformada a un hamiltonià H, per intentar que $T_\varepsilon H = H\circ\Phi(\cdot,\varepsilon)$ estigui en forma normal.

Si volem veure $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ com una aplicació, l'únic que hem de fer és aplicar la transformada a les funcions coordenades: per a cada x_j, trobem un component $\Phi_j(y,\varepsilon) = T_\varepsilon x_j$, $j=1,\dots,2n$, i així $\Phi(y,\varepsilon) = (T_\varepsilon x_1, \dots, T_\varepsilon x_{2n})$.

- Els algorismes basats en sèries de Lie són molt útils des del punt de vista pràctic, ja que:
  - permeten dur a terme càlculs explícits en exemples concrets.
  - poden ser directament implementats en ordinadors.

- El mètode de les transformades de Lie en la seva forma actual fou desenvolupat primer per a sistemes hamiltonians [Deprit69], i després generalitzat a sistemes d'EDOs més generals [Kamel70] (i d'altres referències).

  Hi ha moltes variants del mètode, que de manera simplificada podem resumir en les següents (cas hamiltonià):

  (a) considerar una única transformació simplèctica consistent en el flux a temps ε d'un hamiltonià no autònom $W(x,\tau) = W_1(x) + \tau W_2(x) + \tau^2 W_3(x) + \dots$

  (b) considerar una única transformació simplèctica consistent en el flux a temps ε d'un hamiltonià autònom $W(x,\varepsilon) = W_1(x) + \varepsilon W_2(x) + \varepsilon^2 W_3(x) + \dots$

  (c) considerar successives transformacions simplèctiques consistents en el flux a temps ε de hamiltonians autònoms $\varepsilon^{m-1} W^{(m)}(x)$, d'ordres m creixents.

Podem trobar a [LochakM, ap. 7 i 8], [MeyerH, cap. VII] diverses variants de transformades de Lie per a sistemes hamiltonians. Una formulació més àmplia, per a sistemes d'EDOs en general, es troba a [ChowH].

Transformada de Lie generada per un hamiltonià no autònom

És la variant que dóna lloc a fórmules més compactes. Potser també és la més natural per a construir una transformació simplèctica $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ propera a la identitat: $\Phi(\cdot,\varepsilon) = id + O(\varepsilon)$.

Proposició. Una transformació $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ depenent d'un paràmetre ε és simplèctica i propera a la identitat $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon$, $\Phi(\cdot,\varepsilon) = \varphi_{0,\varepsilon}$ flux d'un hamiltonià $W(x,\tau)$ (en general, no autònom)

Prova. De moment provem que $\Phi(\cdot,\varepsilon) = \varphi_{0,\varepsilon}$, flux d'un sistema d'EDOs $\frac{dx}{d\tau} = X(x,\tau)$

s'ha de complir: $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(x,\tau) = X(\Phi(x,\tau),\tau)$, $\Phi(x,0) = x$ (1)

$\Rightarrow$ prenem $X(x,\tau) = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\Phi^{-1}(x,\tau),\tau)$, (2)

on usem que Φ és difeo. local, i escrivim $\Phi^{-1}(\cdot,\tau) = \Phi(\cdot,\tau)^{-1}$ (inversa respecte x)

Es comprova que (1) es compleix per al sistema d'EDOs definit a (2).

Ara provem: $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ simplèctica $\forall\varepsilon \Longleftrightarrow X(x,\tau) = J\cdot Z(x,\tau)$, on $Z(x,\tau) = \nabla W(x,\tau)$ per alguna funció $W(x,\tau)$.

(de fet, ja coneixem la implicació ($\Leftarrow$))

Derivant (*) respecte x, obtenim les equacions variacionals per a $D\Phi(x,\varepsilon) = D_x\Phi(x,\varepsilon)$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} D\Phi(x,\tau) = DX(\Phi(x,\tau),\tau)\cdot D\Phi(x,\tau)$$

Definim $U(\tau) = D\Phi(x,\tau)^T J\, D\Phi(x,\tau)$, i derivem:

$$\frac{dU}{d\tau} = \left(DX(\Phi(x,\tau),\tau)\cdot D\Phi(x,\tau)\right)^T J\, D\Phi(x,\tau) + D\Phi(x,\tau)^T J\, DX(\Phi(x,\tau),\tau)\cdot D\Phi(x,\tau) =$$

$$= D\Phi(x,\tau)^T \left(DX(\Phi(x,\tau),\tau)^T\cdot J + J\, DX(\Phi(x,\tau),\tau)\right) D\Phi(x,\tau).$$

Notem que $U(0) = J$. Usant que $\Phi(\cdot,\tau)$ és difeo local,

$\Phi(\cdot,\tau)$ simplèctica $\forall \tau \iff \dot U(\tau) \equiv 0 \iff DX(x,\tau)^T J + J\,DX(x,\tau) = 0 \quad \forall x,\tau \iff$

($DX(x,\tau)$ matriu hamiltoniana)

$\iff \underset{\displaystyle J\,DZ(x,\tau)}{\underset{\shortparallel}{DX(x,\tau)}} = J\,S(x,\tau)$, amb $S(x,\tau)$ simètrica $\forall x,\tau \iff$

$\iff Z(x,\tau) = \nabla W(x,\tau)$ per alguna funció $W(x,\tau)$ (localment)

La funció $W(x,\tau)$ s'anomena el <u>hamiltonià generador</u> de la transformació $\Phi(\cdot,\varepsilon)$.

- Partim d'un hamiltonià <u>autònom</u> $H(x,\varepsilon)$, de tipus <u>quasi-integrable</u>, és a dir, que per a $\varepsilon = 0$ tenim un hamiltonià integrable $H_0(x) = H(x,0)$, el qual té un comportament ben conegut. Volem construir una transformació simplèctica $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ de manera que $H^*(x,\varepsilon) = H(\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)$ estigui en forma normal, és a dir, que tingui l'expressió més simple possible. Com que per a $\varepsilon = 0$ ja podem admetre que $H_0(x)$ és en forma normal, ens convé considerar $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ propera a la identitat ($\Phi(\cdot,0) = id$)

Primer suposarem $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ generada per un hamiltonià no autònom $W(x,\tau)$ donat, i veurem l'algorisme per a trobar H^* a partir de H i W. Després, veurem com escollir W per aconseguir que H^* estigui en forma normal.

Considerem desenvolupaments

$$F(x,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} F_m^0(x)$$ funció qualsevol (prendrem $F = H$, però podria ser una altra funció)

$$W(x,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^m}{m!} W_{m+1}(x)$$ hamiltonià generador $\rightsquigarrow$ flux $\Phi(\cdot,\varepsilon) = \varphi_{0,\varepsilon}$ (temps ε)

$\rightsquigarrow$ Nova funció $F^* = T_W F$ (<u>transformada de Lie</u> de F generada per W),

$$F^*(x,\varepsilon) = F(\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} F_0^m(x),$$

i volem calcular les F_0^m a partir de les F_m^0 i les W_m.

(notem que F_0^0 és la mateixa per a les dues funcions)

Recordant que $\frac{d}{d\varepsilon} F(\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = (\mathcal{L}_W F)(\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)$, essent $\mathcal{L}_W F = \{F, W\} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$ (derivada de Lie),

tindrem
$$F_0^m(x) = \left.\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\right|_{\varepsilon=0} F(\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = (\mathcal{L}_W^m F)(x,0)$$

Podem considerar les funcions $(\mathcal{L}_W^m F)(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} F_k^m(x)$, i anar-les calculant de manera recursiva:

$$\mathcal{L}_W^m F = \mathcal{L}_W(\mathcal{L}_W^{m-1} F) = \{\mathcal{L}_W^{m-1} F, W\} + \frac{\partial(\mathcal{L}_W^{m-1} F)}{\partial \varepsilon} =$$
$$= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} F_k^{m-1}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} W_{k+1} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k-1}}{(k-1)!} F_k^{m-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \underbrace{\left(F_{k+1}^{m-1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \{ F_{k-j}^{m-1}, W_{j+1} \} \right)}_{= F_k^m}$$

Tenim així la recurrència
$$\boxed{F_k^m = F_{k+1}^{m-1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \{ F_{k-j}^{m-1}, W_{j+1} \}, \quad m \geq 1,\ k \geq 0,}$$
que permet organitzar els càlculs d'acord amb el "triangle de Lie":

$$\begin{tikzcd}
F_0^0 \arrow[d] & & & \\
F_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{F_0^1} \arrow[d] & & \\
F_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^2 \arrow[d] & \\
F_3^0 \arrow[r] & F_2^1 \arrow[r] & F_1^2 \arrow[r] & F_0^3
\end{tikzcd}$$

La funció de partida F és a la 1a columna, i anirem trobant la nova funció F^* a la diagonal.

Per a calcular F_k^m, necessitem $\underbrace{F_0^{m-1}, \dots, F_{k+1}^{m-1}}_{\text{columna anterior}}, W_1, \dots, W_{k+1}$.

S'ha de procedir per files: un cop hem completat tota la fila de F_0^{m-1}, calculem $F_{m-1}^1, F_{m-2}^2, \dots, F_0^m$ a la fila següent. P.ex., els primers càlculs:
$$\left| \begin{array}{l} F_0^1 = F_1^0 + \{F_0^0, W_1\} \\ F_1^1 = F_2^0 + \{F_1^0, W_1\} + \{F_0^0, W_2\} \\ F_0^2 = F_1^1 + \{F_0^1, W_1\} \end{array} \right.$$

Notem que, si volem desenvolupar F^* fins ordre N (és a dir, trobar $F_0^0, \dots, F_0^N$), només hem de fer servir els desenvolupaments de F i W fins ordre N (és a dir, $F_0^0, \dots, F_N^0, W_1, \dots W_N$). No cal dir que aquests càlculs requeriran l'ús de l'ordinador.

Aquest algorisme admet algunes variants. Per exemple, considerant la transformada inversa i no posant els factorials als desenvolupaments, i amb alguna altra modificació addicional, tenim l'algorisme de Giorgilli–Galgani (vegeu [GiorgilliG78], [GiorgilliG85]).

Forma normal prop d'un punt crític.

Veurem com obtenir la forma normal d'un hamiltonià prop d'un punt crític, comentant les dificultats que apareixen.

Suposant que el punt crític és $(x^0,y^0)=(0,0)$ i que $H(0,0)=0$, tindrem un desenvolupament de Taylor

$$H(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty} H_m(x,y), \text{ amb } H_m \text{ polinomi homogeni de grau } m+2;$$

$(x,y)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ escriurem $H_m \in \mathcal{P}_m$ (espai de polinomis homogenis reals de grau $m+2$, $\dim \mathcal{P}_m = \binom{(m+2)+2n-1}{2n-1}$)

- El sistema linealitzat en el $(0,0)$ ve donat per
$$B = DX_H(0,0) = J\, D^2H_0(0,0), \text{ matriu hamiltoniana.}$$

Els vaps de B són els exponents característics del punt crític, i són de la forma $\lambda_1,\dots,\lambda_n,-\lambda_1,\dots,-\lambda_n$. Suposarem per simplificar que B és diagonalitzable (sobre $\mathbb{C}$). Llavors, podem diagonalitzar amb una matriu simplèctica (en general, complexa):

$$\exists\, C \text{ simplèctica t.q. } C^{-1}BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

(vegeu [Meyer H, p.46])

Suposarem d'entrada que B té aquesta forma diagonal; llavors la part quadràtica del hamiltonià és

$$H_0(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j y_j. \quad (*)$$

Els exponents característics poden ser reals o complexos. Suposarem que $\pm\lambda_1,\dots,\pm\lambda_r$ són imaginaris purs, $\pm\lambda_j = \pm i\omega_j$, $j=1,\dots,r$, i que $\pm\lambda_{r+1},\dots,\pm\lambda_n$ són reals (per al cas de vaps del tipus $\pm\gamma_j + i\delta_j$, vegeu el problema ...).

Podem tenir doncs una part el·líptica $2r$-dim, i una part hiperbòlica $2(n-r)$-dim, $0\le r\le n$. Si hi ha part el·líptica ($r\ge 1$), a $(*)$ estem considerant coordenades complexes; de fet amb un canvi simplèctic real tindríem

$$H_0(q,p,\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \omega_j (q_j^2+p_j^2) + \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j x_j y_j, \quad (**)$$

$$(q,p)=(q_1,\dots,q_r,p_1,\dots,p_r), \quad (\hat{x},\hat{y}) = (x_{r+1},\dots,x_n,y_{r+1},\dots,y_n),$$

i llavors amb el canvi simplèctic complex

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - i p_j), \quad y_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_j - i q_j), \quad j=1,\dots,r,$$

obtenim la forma $(*)$. Notem però que un punt (x,y) serà "real" si el seu corresponent $(q,p,\hat{x},\hat{y})$ és real, és a dir, si $\overline{y_j} = i x_j$, $j=1,\dots,r$, i x_j, y_j reals, $j=r+1,\dots,n$. D'aquesta manera tractem simultàniament els casos hiperbòlic i el·líptic.

La part quadràtica $(*)$ té les funcions $x_j y_j$, $j=1,\dots,n$ com a integrals primeres en involució, i independents (excepte en plans coordenats). Així, H_0 és integrable.

A més, en el cas d'un punt el·líptic ($r=n$), tenim les accions

$$I_j = \frac{1}{2}(q_j^2+p_j^2) = i x_j y_j,$$

i fent el canvi a variables angle-acció

$$\begin{cases} q_j = \sqrt{2I_j}\cdot \sin\phi_j \\ p_j = \sqrt{2I_j}\cdot\cos\phi_j \end{cases}, \quad \text{és a dir} \quad \begin{cases} x_j = -i\sqrt{I_j}\, e^{i\phi_j} \\ y_j = \sqrt{I_j}\, e^{-i\phi_j} \end{cases}$$

obtenim $H_0 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j I_j = \langle \omega, I\rangle$

- Per aplicar les fórmules de la transformada de Lie al hamiltonià complet $H(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x,y)$, l'hem de veure com un hamiltonià quasi-integrable.

Fent el canvi d'escala $(x,y)=(\varepsilon\tilde{x},\varepsilon\tilde{y})$, que es un canvi "simplèctic amb multiplicador $\frac{1}{\varepsilon^2}$", obtenim

$$\tilde{H}(\tilde{x},\tilde{y},\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} H(\varepsilon\tilde{x},\varepsilon\tilde{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m H_m(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_m^0(\tilde{x},\tilde{y}) \quad (1)$$

(hem introduït un paràmetre artificial ε que ve a significar la distància a l'origen: quan aquesta distància és petita, el hamiltonià és més "proper a integrable")

Per a cada polinomi homogeni $H_m^0 \in \mathcal{P}_m$, escrivim $H_m^0 = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}^n \\ |k+l|=m+2}} h_{k,l}\, x^k y^l$,

amb les notacions $|k+l| = \sum_{j=1}^{n}(k_j+l_j)$, $x^k = x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, $y^l = y_1^{l_1}\cdots y_n^{l_n}$.

Notem que els monomis $x^k y^l$ formen una base de $\mathcal{P}_m$ com a espai vectorial.

Direm que H_m és "real" si pren valors reals sobre punts "reals" (encara que els coeficients $h_{k,l}$ poden ser complexos). Imposant $\overline{H_m} = H_m$ sobre punts "reals" s'obté la condició que han de complir els coeficients:

$$h_{\tilde{l},\hat{k},\tilde{k},\hat{l}} = i^{|\tilde{k}+\tilde{l}|}\,\overline{h_{\tilde{k},\hat{k},\tilde{l},\hat{l}}}, \quad \text{on hem escrit } k=(\tilde{k},\hat{k}),\ \tilde{k}=(k_1,\dots,k_r),\ \hat{k}=(k_{r+1},\dots,k_n).$$

Aquest caràcter "real" dels polinomis es pot anar garantint al llarg del procés (p.ex., el parèntesi de Poisson de polinomis "reals" és "real").

Considerem un hamiltonià generador $W(x,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} W_{m+1}(x)$,

on cada $W_{m+1} \in \mathcal{P}_{m+1}$ (polinomi homogeni de grau $m+3$, $m\geq 0$)

Apliquem la recurrència del triangle de Lie, tenint en compte:

$$\underset{(\text{grau } k+2)}{F\in\mathcal{P}_k},\ \underset{(\text{grau } l+2)}{G\in\mathcal{P}_l} \implies \underset{(\text{grau } k+l+2)}{\{F,G\}\in\mathcal{P}_{k+l}}$$

Podem comprovar per inducció que $H_k^m \in \mathcal{P}_{m+k}$, $\forall m \geq 1, k \geq 0$.
D'aquesta manera tenim un nou hamiltonià de la forma $H^* = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_0^m$, amb $H_0^m \in \mathcal{P}_m$.

- Ara estudiem com escollir les W_m perquè les H_0^m estiguin en forma normal, és a dir, tinguin el mínim de termes possible.

Primer pas

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\}$$

H_0^0, H_1^0 coneguts $\rightsquigarrow$ trobar W_1, H_0^1 solucions de l'EDP lineal

$$\boxed{\{W_1, H_0^0\} + H_0^1 = H_1^0} \quad \text{eq. homològica (2)}$$

Resolució de l'eq. homològica.

Escrivint $W_1 = \sum_{|k+l|=3} w_{k,l} x^k y^l$, recordant que H_0^0 ve donat per $(*)$,

i usant que $\{x^k y^l, H_0^0\} = \sum_{j=1}^n \left(k_j x^{k-e_j} y^l \cdot \lambda_j x_j - \lambda_j y_j \cdot l_j x^k y^{l-e_j}\right) =$

$$= \sum_{j=1}^n (k_j - l_j)\lambda_j \, x^k y^l = \langle k-l, \lambda\rangle x^k y^l, \qquad (3)$$

obtenim $\{W_1, H_0^0\} = \sum_{|k+l|=3} \langle k-l, \lambda\rangle w_{k,l} x^k y^l$.

Llavors, igualant els coeficients de $x^k y^l$ a l'equació homològica (2),

$$\langle k-l, \lambda\rangle w_{k,l} + h^*_{k,l} = h_{k,l}, \quad \forall |k+l| = 3,$$

i podrem prendre $h^*_{k,l} = 0$ sempre que $\langle k-l, \lambda\rangle \neq 0$.

Definim el mòdul de ressonàncies associat al vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$\mathcal{M}_\lambda = \{k \in \mathbb{Z}^n : \langle k, \lambda\rangle = 0\}, \text{ un subgrup del grup abelià } \mathbb{Z}^n$$
(submòdul del $\mathbb{Z}$-mòdul $\mathbb{Z}^n$)

El vector λ és no ressonant si $\mathcal{M}_\lambda = 0$, és a dir, $\langle k, \lambda\rangle \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.
(també diem que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són racionalment independents)
Així, podem donar com a solució de l'eq. homològica W_1, H_0^1 definides per:

$$\begin{cases} w_{k,l} = \dfrac{h_{k,l}}{\langle k-l, \lambda\rangle}, & h^*_{k,l} = 0 \quad \text{si } k-l \notin \mathcal{M}_\lambda \text{ (termes no ressonants)} \\ w_{k,l} = 0, & h^*_{k,l} = h_{k,l} \quad \text{si } k-l \in \mathcal{M}_\lambda \text{ (termes ressonants)} \end{cases}$$

(en el cas $k-l \in \mathcal{M}$, altres tries són possibles, però també intentem que W_1 no tingui més termes dels necessaris, per estalviar operacions en els passos següents)

Es comprova que, si H_1^0 és "real", llavors W_1, H_0^1 són "reals".

Forma normal respecte un mòdul

Considerem un subgrup $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ (en principi $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$ però també ens pot interessar $\mathcal{M} \supsetneq \mathcal{M}_\lambda$).

Def. Donada una funció $F = \sum_{k,\ell} f_{k,\ell} x^k y^\ell$ en un entorn de l'origen, direm que és en forma normal respecte $\mathcal{M}$ si $f_{k,\ell} = 0$ sempre que $k-\ell \notin \mathcal{M}$, és a dir, $F = \sum_{k-\ell \in \mathcal{M}} f_{k,\ell} x^k y^\ell$. (F només té termes ressonants)

Segons si $\mathcal{M} = 0$ o $\mathcal{M} \neq 0$, parlarem de f.n. no ressonant o ressonant, respectivament. Observem que, en el cas no ressonant, tots els termes han de tenir $k = \ell$ i per tant $F = \sum_k f_{k,k} (xy)^k$, una funció dels productes $x_1 y_1, \dots, x_n y_n$.

Passos següents

Suposem que ja hem trobat $W_1, \dots, W_{m-1}$ de manera que $H_0^1, \dots, H_0^{m-1}$ són en forma normal respecte $\mathcal{M}_\lambda$, i ens proposem trobar W_m tal que H_0^m sigui també en forma normal. Els elements de la fila corresponent del triangle de Lie venen donats per

$$H_{m-\ell}^{\ell} = H_{m-\ell+1}^{\ell-1} + \sum_{j=0}^{m-\ell} \binom{m-\ell}{j} \{H_{m-\ell-j}^{\ell-1}, W_{j+1}\}, \quad \ell = 1, \dots, m,$$

on W_m només apareix quan $\ell = 1$. Llavors podem escriure

$$H_{m-\ell}^{\ell} = L_{m-\ell}^{\ell} + \{H_0^0, W_m\},$$

essent

$$L_m^0 = H_m^0, \quad L_{m-\ell}^{\ell} = L_{m-\ell+1}^{\ell-1} + \sum_{j=0}^{m-\ell} \binom{m-\ell}{j} \{H_{m-\ell-j}^{\ell-1}, \widetilde{W}_{j+1}\}, \quad \ell = 1, \dots, m,$$

$$\text{amb } \widetilde{W}_j = \begin{cases} W_j & \text{si } j \le m-1 \\ 0 & \text{si } j = m \end{cases}$$

Com que W_m no intervé en aquestes fórmules, podem anar calculant les $L_{m-\ell}^{\ell}$ a partir de dades ja conegudes. Un cop hem calculat L_0^m, podem plantejar l'equació homològica $\{W_m, H_0^0\} + H_0^m = L_0^m$, la qual resoldrem de manera totalment anàloga a (2), i com abans obtenim W_m només amb termes no ressonants, i H_0^m només amb termes ressonants, és a dir, en forma normal respecte $\mathcal{M}_\lambda$. D'acord amb (3), la f.n. ve caracteritzada perquè $\{H_0^m, H_0^0\} \equiv 0$.

Nota: Quan es construeixen f.n.'s per a sistemes d'EDOs en general, cal tenir en compte les ressonàncies de tots els exponents característics, $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$. El vector $\tilde{\lambda}$ sempre és ressonant, per la qual cosa en general no és possible reduir H a un sistema lineal, donat per la part quadràtica H_0^0. Això fa que els termes $(xy)^k$ siguin inevitables, fins i tot si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és no ressonant.

Formulació abstracta de l'equació homològica

Recordant que el sistema lineal associat a la part quadràtica $H_0^0(x)$ ve donat per la matriu

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \end{pmatrix},$$

li podem associar un operador lineal $\mathcal{L}_B : \mathcal{P}_m \longrightarrow \mathcal{P}_m$ definit per $\mathcal{L}_B F = \{F, H_0^0\} = \nabla F(x)^T B x$.

Els **veps** d'aquest operador són els monomis $x^k y^l$, $|k+l| = m$, amb vaps $\langle k-l, \lambda\rangle$. Per tant, la matriu de l'operador $\mathcal{L}_B$ en la base formada pels $x^k y^l$ és diagonal (però no invertible, ja que $\langle k-l,\lambda\rangle = 0$ si $k-l \in \mathcal{M}_\lambda$).

Definim els subespais $Q_m = \{$polinomis de $\mathcal{P}_m$ només amb termes ressonants (f.n.)$\}$,

$R_m = \{$ " " " " no ressonants $\}$,

i notem que $\mathcal{P}_m = Q_m \oplus R_m$, i també que $Q_m = \operatorname{Ker} \mathcal{L}_B$, $R_m = \operatorname{Im} \mathcal{L}_B$.
Així, F és en f.n. respecte $\mathcal{M}_\lambda \iff \{F, H_0^0\} \equiv 0$ (és a dir, F és i.p. de H_0^0).
Podem plantejar l'eq. homològica com: donat $G \in \mathcal{P}_m$, trobar $N \in Q_m$ i $F \in R_m$ tals que

$$\mathcal{L}_B F + N = G.$$

Aquests N i F són únics (de fet, també ho serien si busquem F en qualsevol altre subespai complementari de Q_m).

Amb aquest punt de vista és possible generalitzar la construcció de la forma normal al cas en què B no és diagonalitzable, estudiant quins termes cal deixar a la forma normal en cada situació. (vegeu [Meyer H, § VII. C2] o també [Bryuno 71]).

Formes normals fins ordre finit

Quan intentem posar tot el hamiltonià H en forma normal, és a dir obtenir $H_0^m \in Q_m$ $\forall m \geq 0$, les sèries que s'obtenen en general són divergents. No obstant això, podem obtenir informació útil truncant el procés a ordre finit. Donat N, podem trobar un polinomi $W = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\varepsilon^m}{m!} W_{m+1}$, amb $W_m \in R_m$, de manera que

$$H^* = \sum_{m=0}^{N} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_0^m + O(\varepsilon^{N+1}), \text{ amb } H_0^m \in Q_m,\ m = 0, 1, \dots, N.$$

Direm que $\Gamma^{(N)} = \sum_{m=0}^{N} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_0^m$ és la f.n. truncada a ordre N (grau $\leq N+2$),
i que $R^{(N)} = \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_0^m = O(\varepsilon^{N+1})$ és la resta (grau $\geq N+3$), la qual dóna una sèrie convergent en un entorn de l'origen, i es pot calcular fins a qualsevol ordre aplicant el triangle de Lie (tots els càlculs exactes llevat d'errors d'arrodoniment). Notem que $\Gamma^{(N)}$ es pot calcular a partir de H_m^0, $m = 0, \dots, N$.

- Desfent el canvi d'escala (1), podem escriure $\Gamma^{(N)} = \sum_{m=0}^{N} \Gamma_m$, $R^{(N)} = \sum_{m=N+1}^{\infty} R_m^{(N)} = O_{N+3}(x,y)$, $H \circ \Phi = \Gamma^{(N)} + R^{(N)}$, $\Phi(x,y) = (x,y) + O_2(x,y)$.

Nota. Sense fer i desfer el canvi d'escala, haguéssim pogut aplicar directament el flux a temps $s = 1$ del hamiltonià $\hat{W}(x,y,s) = \varepsilon^3 \cdot W(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \varepsilon s) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m!} s^{m+1} W_{m+1}(x,y)$.

Transformades de Lie generades per successius hamiltonians autònoms

- Tornant al cas general d'un hamiltonià quasi-integrable $H(x,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m H_m(x)$, ara volem passar-lo a forma normal fent una transformació simplèctica $\Phi(\cdot,\varepsilon)=$ flux a temps 1 d'un hamiltonià <u>autònom</u> $W(x,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m W_m(x)$

$$\left(= \text{flux a temps } \varepsilon \text{ de } \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m W_{m+1}(x)\right)$$

Tenim:

$$H\circ\Phi(\cdot,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m}{\partial \tau^m}\right|_{\tau=0}(H\circ\varphi_{0,\tau})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\mathcal{L}_W^m H=$$

$$\mathcal{L}_W H=\{H,W\}$$

$$=H+\{H,W\}+\frac{1}{2!}\{\{H,W\},W\}+\cdots=\exp(\mathcal{L}_W)\,H$$

Agrupant segons potències de ε, obtenim $H\circ\Phi(\cdot,\varepsilon)=H^*=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m H_m^*(x)$,

essent

$$\begin{aligned}
H_0^* &= H_0\\
H_1^* &= H_1+\{H_0,W_1\}\\
H_2^* &= H_2+\{H_0,W_2\}+\{H_1,W_1\}+\tfrac{1}{2}\{\{H_0,W_1\},W_1\}\\
H_3^* &= H_3+\{H_0,W_3\}+\{H_1,W_2\}+\{H_2,W_1\}+\tfrac{1}{2}\left(\{\{H_0,W_1\},W_2\}+\{\{H_0,W_2\},W_1\}+\{\{H_1,W_1\},W_1\}\right)\\
&\quad+\tfrac{1}{6}\{\{\{H_0,W_1\},W_1\},W_1\}.
\end{aligned}$$

etc.

Així, per a calcular $H_1^*,\dots,H_m^*$, només hem de fer servir $H_0,H_1,\dots,H_m$, $W_1,\dots,W_m$.

En el cas d'un punt d'equilibri, partint de $H_m, W_m\in\mathcal{P}_m$, obtenim tots els $H_m^*\in\mathcal{P}_m$.

Si volem que els H_m^* estiguin en forma normal, a cada pas $m=1,2,\dots$ hem d'usar resultats anteriors i resoldre una eq. homològica, que és del mateix tipus que hem vist amb generadors no autònoms:

$$\begin{aligned}
&\{W_1,H_0\}+H_1^*=H_1 &&\rightsquigarrow W_1,\ H_1^*\\
&\{W_2,H_0\}+H_2^*=H_2+\{H_1,W_1\}+\tfrac{1}{2}\{\{H_0,W_1\},W_1\} &&\rightsquigarrow W_2,\ H_2^*
\end{aligned}$$

etc.

Observem però que la part dreta (coneguda) de les equacions es va complicant, i no hi ha unes fórmules recurrents compactes com quan usem un generador no autònom.

- Observem que si W comença amb termes d'ordre p,
$W(x,\varepsilon) = \varepsilon^p W_p(x) + \varepsilon^{p+1} W_{p+1}(x) + \cdots$, només modifiquem els termes del hamiltonià a partir d'ordre p:

$$\begin{cases} H_m^* = H_m & \forall\, m \leq p-1 \\ H_{p+1}^* = H_p + \{H_0, W_p\} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

A més, productes múltiples com $\frac{1}{2}\{\{H_0, W_p\}, W_p\}$ només apareixen a ordres $\geq 2p$.
(observacions anàlogues també són vàlides amb generadors no autònoms).

Això ens motiva a considerar successives transformacions, generades per hamiltonians d'ordre cada cop més alt. Amb això també evitem guardar en memòria tots els càlculs intermitjos (que és el principal inconvenient del triangle de Lie). Podem dur a terme un algorisme lineal o quadràtic, segons com ho organitzem.

- Algorisme lineal. A cada pas, posem un terme H_m^* en forma normal.

$$W^{(1)} = \varepsilon W_1 \rightarrow H^{(1)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \varepsilon^2 R_2^{(1)} + \varepsilon^3 R_3^{(1)} + \cdots$$ (Γ_m: forma normal, $R_m^{(p)}$: resta)

$$W^{(2)} = \varepsilon^2 W_2 \rightsquigarrow H^{(2)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \varepsilon^2 \Gamma_2 + \varepsilon^3 R_3^{(2)} + \cdots$$

$\vdots$

Suposant $H^{(m-1)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \cdots + \varepsilon^{m-1}\Gamma_{m-1} + \varepsilon^m R_m^{(m-1)} + \varepsilon^{m+1} R_{m+1}^{(m-1)} + \cdots$,
escollim $W^{(m)} = \varepsilon^m W_m$ de manera que

$$H^{(m)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \cdots + \varepsilon^m \Gamma_m + \varepsilon^{m+1} R_{m+1}^{(m)} + \cdots,$$

resolent $\{W_m, H_0\} + \Gamma_m = R_m^{(m-1)} \rightsquigarrow W_m, \Gamma_m$.

- Algorisme quadràtic. A cada pas, posem $1, 2, 4, 8, \ldots$ termes en forma normal.

$$W^{(1)} = \varepsilon W_1 \rightsquigarrow H^{(1)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \varepsilon^2 R_2^{(1)} + \varepsilon^3 R_3^{(1)} + \cdots$$ (el primer pas és el mateix per als dos algorismes)

resolent: $\{W_1, H_0\} + \Gamma_1 = H_1 \rightsquigarrow W_1, \Gamma_1$

$$W^{(2)} = \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 \rightsquigarrow H^{(2)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \varepsilon^2 \Gamma_2 + \varepsilon^3 \Gamma_3 + \varepsilon^4 R_4^{(2)} + \varepsilon^5 R_5^{(2)} + \cdots$$

resolent:
$$\{W_2, H_0\} + \Gamma_2 = R_2^{(1)} \rightsquigarrow W_2, \Gamma_2$$
$$\{W_3, H_0\} + \Gamma_3 = R_3^{(1)} + \{\Gamma_1, W_2\} \rightsquigarrow W_3, \Gamma_3$$

$$W^{(3)} = \varepsilon^4 W_4 + \varepsilon^5 W_5 + \varepsilon^6 W_6 + \varepsilon^7 W_7 \rightsquigarrow H^{(3)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \cdots + \varepsilon^7 \Gamma_7 + \varepsilon^8 R_8^{(3)} + \cdots$$

resolent:
$$\{W_4, H_0\} + \Gamma_4 = R_4^{(2)} \rightsquigarrow W_4, \Gamma_4$$
$$\{W_5, H_0\} + \Gamma_5 = R_5^{(2)} + \{\Gamma_1, W_4\} \rightsquigarrow W_5, \Gamma_5$$
$$\{W_6, H_0\} + \Gamma_6 = R_6^{(2)} + \{\Gamma_1, W_5\} + \{\Gamma_2, W_4\} \rightsquigarrow W_6, \Gamma_6$$
$$\{W_7, H_0\} + \Gamma_7 = R_7^{(2)} + \{\Gamma_1, W_6\} + \{\Gamma_2, W_5\} + \{\Gamma_3, W_4\} \rightsquigarrow W_7, \Gamma_7$$

En general, partint de $H^{(m-1)} = H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \dots + \varepsilon^{2^{m-1}-1} \Gamma_{2^{m-1}-1} + \varepsilon^{2^{m-1}} R^{(m-1)}_{2^{m-1}} + \dots$,

podrem escollir $W^{(m)} = \varepsilon^{2^{m-1}} W_{2^{m-1}} + \dots + \varepsilon^{2^m-1} W_{2^m-1}$ de manera que

$$H^{(m)} = \underbrace{H_0 + \varepsilon \Gamma_1 + \dots + \varepsilon^{2^m-1} \Gamma_{2^m-1}}_{\text{f.n.}} + \underbrace{\varepsilon^{2^m} R^{(m)}_{2^m} + \dots}_{\text{resta}},$$

resolent 2^{m-1} equacions homològiques, d'acord amb un esquema triangular.

Des del punt de vista computacional, l'avantatge d'usar successives transformacions simplèctiques és que a cada pas no cal guardar en memòria tots els càlculs anteriors, al contrari que amb el triangle de Lie.

Els algorismes de tipus quadràtic són útils quan es requereix la convergència del procés iteratiu (com en el cas del teorema KAM), per tal que la rapidesa del procés permeti superar la influència dels petits divisors.
Un exemple d'ús d'un algorisme quadràtic es troba a [Ito89].

Cas d'un hamiltonià quasi-integrable qualsevol.

- Els algorismes descrits, que hem aplicat al cas d'un punt d'equilibri, es poden aplicar també al cas d'un hamiltonià quasi-integrable de la forma general, en variables acció-angle: $H(\phi, I, \varepsilon) = h(I) + \varepsilon f(\phi, I)$, per a obtenir una forma normal $H^*(\phi, I, \varepsilon) = \underbrace{h(I) + \varepsilon \Gamma_1(\phi, I) + \dots + \varepsilon^N \Gamma_N(\phi, I)}_{\text{f.n.}} + \underbrace{\varepsilon^{N+1} R_{N+1}(\phi, I) + \dots}_{\text{resta}}$

Si volem implementar els càlculs en un ordinador, haurem de partir d'un desenvolupament de Fourier $f(\phi, I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k(I)\, e^{i\langle k, \phi\rangle}$, on les $f_k(I)$ es poden també desenvolupar per Taylor: $f_k(I) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^n} f_{k\ell} (I - I^0)^\ell$ per obtenir la f.n. en un entorn del tor $I = I^0$ (tenim així una sèrie de Poisson per a $f(\phi, I)$).

L'inconvenient és que, si volem fer càlculs explícits fins a un ordre finit, quan calculem els parèntesis de Poisson hem de multiplicar sèries de Fourier: $\left(\sum a_k e^{i\langle k,\phi\rangle}\right)\left(\sum b_k e^{i\langle k,\phi\rangle}\right) = \sum c_k e^{i\langle k,\phi\rangle}$, i no podem calcular exactament els coeficients del producte fent un nombre finit d'operacions: $c_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} a_\ell b_{k-\ell}$.

Això no passa quan multipliquem sèries de Taylor (per això en el cas d'un punt d'equilibri podem fer tots els càlculs fins a qualsevol ordre finit).

Com a alternativa, podem anar truncant totes les sèries de Fourier a un cert ordre K prou gran. Tota la part que requerís conèixer harmònics d'ordre $> K$, la fitaríem i l'aniríem incloent a la resta. Així, començaríem el procés amb $f_{\leq K}(\phi, I) = \sum_{|k| \leq K} f_k(I)\, e^{i\langle k,\phi\rangle}$, (1)

i inclouríem $f_{>K}(\phi, I) = \sum_{|k|>K} f_k(I)\, e^{i\langle k,\phi\rangle}$ (que admet una fita exponencialment petita en K) a la resta.

- En alguns problemes més teòrics en què no hem de fer càlculs explícits, podem prescindir de ε com a paràmetre i considerar un hamiltonià concret:

$H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$, amb una pertorbació f prou petita: $\|f\| = \varepsilon$.

Vegem en aquest cas com aplicaríem l'<u>algorisme lineal</u>, per obtenir, després de m passos, una f.n. $H^{(m)} = h(I) + \Gamma^{(m)}(\phi, I) + R^{(m)}(\phi, I)$ amb $R^{(m)} = O(\varepsilon^{m+1})$.

Partirem de $\Gamma^{(0)} = 0$, $R^{(0)} = f$. Suposem que després de $m-1$ passos tenim $H^{(m-1)} = h + \Gamma^{(m-1)} + R^{(m-1)}$. Apliquem una transformació simplèctica $\phi^{(m)}$, corresponent al flux temps 1 d'un hamiltonià generador $W^{(m)} = O(\varepsilon^m)$, a escollir. Així tenim $\phi^{(m)} = id + O(\varepsilon^m)$, i obtenim:

$$H^{(m)} = H^{(m-1)} \circ \Phi^{(m)} = h + \underbrace{\{h, W^{(m)}\}}_{O(\varepsilon^m)} + \underbrace{\frac{1}{2}\{\{h, W^{(m)}\}, W^{(m)}\} + \dots}_{O(\varepsilon^{2m})} +$$

$$+ \underbrace{\Gamma^{(m-1)}}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{\{\Gamma^{(m-1)}, W^{(m)}\} + \dots}_{O(\varepsilon^{m+1})} + \underbrace{R^{(m-1)}}_{O(\varepsilon^m)} + \underbrace{\{R^{(m-1)}, W^{(m)}\} + \dots}_{O(\varepsilon^{2m})}$$

Per eliminar els termes $O(\varepsilon^m)$ que no estiguin en f.n., hem d'escollir $W^{(m)}$ de manera que $\underbrace{\{h, W^{(m)}\} + R^{(m-1)} = \Delta\Gamma^{(m)}}_{(2)}$ en f.n.

Llavors, $H^{(m)} = h + \Gamma^{(m)} + R^{(m)}$, essent:

$$\Gamma^{(m)} = \Gamma^{(m-1)} + \Delta\Gamma^{(m)}$$

$$R^{(m)} = \frac{1}{2}\{\{h, W^{(m)}\}, W^{(m)}\} + \dots + \{\Gamma^{(m-1)} + R^{(m-1)}, W^{(m)}\} + \dots = \qquad (3)$$

$$= \sum_{\ell \geq 2} \frac{1}{\ell!} \mathcal{L}^{\ell}_{W^{(m)}} h + \sum_{\ell \geq 1} \frac{1}{\ell!} \mathcal{L}^{\ell}_{W^{(m)}} (\Gamma^{(m-1)} + R^{(m-1)}) =$$

$$= \int_0^1 (1-\tau)\{\{h, W^{(m)}\}, W^{(m)}\} \circ \Phi^{(m)}_\tau \, d\tau + \int_0^1 \{\Gamma^{(m-1)} + R^{(m-1)}, W^{(m)}\} \circ \Phi^{(m)}_\tau \, d\tau,$$

essent $\Phi_\tau^{(m)}$ el flux temps τ de $W^{(m)}$.

Hem usat : $$\left| \begin{array}{l} g(1)-g(0) = \int_0^1 g'(\tau)\,d\tau, \quad \text{amb} \quad g(\tau) = \left(\Gamma^{(m-1)} + R^{(m-1)}\right)\circ\Phi_\tau^{(m)} \\ g(1)-g(0)-g'(0) = \int_0^1 (1-\tau)\, g''(\tau)\,d\tau, \quad \text{amb} \quad g(\tau) = h\circ\Phi_\tau^{(m)} \end{array}\right.$$

Resta veure com determinem $W^{(m)}$, $\Delta\Gamma^{(m)}$. L'equació (*) es pot re-escriure com a

$$\boxed{\left\langle \omega(I), \frac{\partial W^{(m)}}{\partial \phi}\right\rangle + \Delta\Gamma^{(m)} = R^{(m-1)}}, \quad \text{eq. homològica}, \qquad (4)$$

on $\omega(I) = (\omega_1(I),\dots,\omega_n(I)) = \nabla h(I)$ és l'aplicació freqüència.

La resolució de l'eq. homològica (4) i, per tant, l'organització del procés iteratiu depenen fortament de l'aplicació freqüència.

(a) Suposem $\omega(I)\equiv\omega$ constant, és a dir $h(I) = \langle\omega, I\rangle$. Podem considerar doncs que $H(\phi, I) = \langle\omega, I\rangle + f(\phi, I)$ és una pertorbació d'un sistema d'oscil·ladors harmònics (és el cas més semblant al d'un punt d'equilibri el·líptic, en què només es consideren les freqüències característiques del punt).

Podem resoldre formalment l'eq. homològica (4) a partir del mòdul de ressonàncies $\mathcal{M}_\omega$. Desenvolupem $W^{(m)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} W_k^{(m)}(I)\cdot e^{i\langle k,\phi\rangle}$, i semblant amb $R^{(m-1)}$, $\Delta\Gamma^{(m)}$. Observant que $\frac{\partial}{\partial\phi_j} e^{i\langle k,\phi\rangle} = i k_j e^{i\langle k,\phi\rangle}$, si a (3) igualem els coeficients de l'harmònic $e^{i\langle k,\phi\rangle}$ obtenim:

$$i\,\langle k,\omega\rangle\, W_k^{(m)}(I) + \Delta\Gamma_k^{(m)}(I) = R_k^{(m-1)}(I), \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n. \qquad (5)$$

Ho resoldríem deixant el mínim possible d'harmònics no nuls a la forma normal:

$$\left| \begin{array}{lll} W_k^{(m)}(I) = \dfrac{R_k^{(m-1)}(I)}{i\langle k,\omega\rangle}, & \Delta\Gamma_k^{(m)}(I) = 0 & \text{si } k\notin\mathcal{M}_\omega \text{ (harmònics no ressonants)} \\ W_k^{(m)}(I) = 0, & \Delta\Gamma_k^{(m)}(I) = R_k^{(m-1)}(I) & \text{si } k\in\mathcal{M}_\omega \text{ (harmònics ressonants)} \end{array}\right. \qquad (6)$$

Així obtenim $\Delta\Gamma^{(m)}$ en forma normal respecte $\mathcal{M}_\omega$, és a dir, $\Delta\Gamma^{(m)} = \sum_{k\in\mathcal{M}_\omega} \Delta\Gamma_k^{(m)}(I)\, e^{i\langle k,\phi\rangle}$.

En el cas no ressonant, $\mathcal{M}_\omega = 0$, obtenim $\Delta\Gamma^{(m)} = \Delta\Gamma^{(m)}(I)$.

La sèrie de Fourier obtinguda per a $W^{(m)}$ és formal, i de fet els petits divisors $\langle k,\omega\rangle$ poden fer que sigui divergent. Per evitar-ho cal imposar alguna condició addicional sobre el vector de freqüències ω, per tal que es trobi "prou lluny" de les ressonàncies no incloses a $\mathcal{M}_\omega$. Les condicions més habituals són les de tipus **diofàntic**:

$$|\langle k,\omega\rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathcal{M}_\omega,$$

on γ,τ són constants positives.

(b) En el cas que la part integrable $h(I)$ sigui una funció qualsevol, tenim una aplicació freqüència $\omega(I)=\nabla h(I)$ no constant. Llavors, no podrem resoldre (5) de manera uniforme en cap entorn, ja que el mòdul $\mathcal{M}_{\omega(I)}$ dependria de I. Per evitar aquesta dificultat, farem els càlculs només amb un nombre finit d'harmònics, fins a un cert ordre K.

Si G és el domini de l'aplicació freqüència $\omega(I)$ (el domini de $H(\phi,I)$ és $\mathbb{T}^n\times G$), haurem de considerar diferents mòduls de ressonàncies segons la zona de G que vulguem estudiar. Donat $I^0\in G$, busquem un mòdul $\mathcal{M}\subset\mathbb{Z}^n$ i un enter K de manera que, en cert entorn $B=B_{\mathcal{M},K}\subset G$ de I^0, es compleixi:

$$\langle k,\omega(I)\rangle\neq 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathcal{M},\ |k|\leq K,\quad \forall\, I\in B.$$

(aquests conjunts $B_{\mathcal{M},K}$ formarien un recobriment de G)

Llavors, en el domini $\mathbb{T}^n\times B$ apliquem el procés descrit abans però admetent com a f. n. només harmònics fins a ordre K (un nº finit):

$$\Delta\Gamma^{(m)}=\sum_{\substack{k\in\mathcal{M}\\|k|\leq K}}\Delta\Gamma_k^{(m)}(I)\,e^{i\langle k,\phi\rangle}$$

Així, resoldríem l'eq. homològica (4) considerant $R^{(m-1)}_{\leq K}$ en comptes de $R^{(m-1)}$, i tota la part $R^{(m-1)}_{>K}$ l'afegiríem directament a $R^{(m)}$ a les fórmules (3).

D'aquesta manera, només hem d'aplicar (6) per a $|k|\leq K$, i tenim la solució de l'eq. homològica ben definida $\forall I\in B$.

L'ordre de truncament K haurà de ser prou gran, perquè la condició $R^{(m)}=O(\varepsilon^{m+1})$ es continuï complint, en afegir-hi els $R^{(m-1)}_{>K}$, al llarg de tot el procés iteratiu ($m=1,\dots,N$).

Un procediment similar al descrit va ser aplicat a [BenettinGG85] per provar el teorema de Nekhoroshev (estabilitat efectiva); vegeu també [LochakM].