APLICACIONS DE LES FORMES NORMALS: PUNTS D'EQUILIBRI, ESTABILITAT EFECTIVA, TEORIA KAM.

Forma normal de Birkhoff (cas no ressonant).

- Donat un hamiltonià en un entorn d'un punt d'equilibri, $H=\sum_{m\geq 0} H_m$, amb $H_0=\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j y_j$, a partir de les propietats de ressonància del vector $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ hem vist com construir $\Phi(x,y)=(x,y)+O_2(x,y)$, transformació simplèctica "propera a la identitat", tal que $H\circ\Phi=\Gamma^{(N)}+R^{(N)}$, amb $\Gamma^{(N)}=\sum_{m=0}^{N}\Gamma_m$ forma normal truncada de grau $N+2$, i $R^{(N)}=\sum_{m=N+1}^{\infty} R_m^{(N)}$ resta (grau $\geq N+3$).
- Suposem que λ és "no ressonant fins a ordre $N+2$":

$$\langle k,\lambda\rangle \neq 0 \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^n,\ 0<|k|\leq N+2$$

Llavors, quan construïm la f.n. truncada $\Gamma^{(N)}$ sempre tenim $k-l\notin\mathcal{M}_\lambda$ si $k\neq l$, ja que $|k+l|\leq N+2$, i per tant $\Gamma^{(N)}$ és una forma normal no ressonant: només dependrà dels productes $x_1y_1,\dots,x_ny_n$ (si hi ha termes ressonants, apareixen a ordres superiors). Notem que una f.n. no ressonant només tindrà termes de grau parell:

$$\Gamma^{(N)}=H_0+\Gamma_2+\Gamma_4+\dots=\sum_{m=0}^{[N/2]}\Gamma_{2m}.$$

Aquesta forma normal (menyspreant la resta) és integrable, ja que té les funcions x_jy_j com a integrals primeres independents i en involució.

- En el cas d'un punt d'equilibri el·líptic ($\lambda_j=i\omega_j$, $j=1,\dots,n$) la f.n. $\Gamma^{(N)}$ rep el nom de forma normal de Birkhoff de grau $N+2$ (va ser estudiada inicialment a [Birkhoff]). Passant a variables acció-angle, $\Gamma^{(N)}=\Gamma^{(N)}(I)$ és un polinomi de grau $[(N+2)/2]$ en les accions $I_j=i\,x_jy_j=\frac{1}{2}(q_j^2+p_j^2)$.

P.ex., amb 2 g.d.l. ($n=2$) la f.n. de Birkhoff de grau 4 és de la forma

$$\Gamma^{(2)}=\omega_1I_1+\omega_2I_2+\frac{1}{2}\left(aI_1^2+2bI_1I_2+cI_2^2\right)=\langle\omega,I\rangle+\frac{1}{2}I^T\Lambda I,\quad \Lambda=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},$$

en la qual totes les trajectòries es troben sobre tors invariants $I=I^0$, amb freqüències depenent de I^0:

$$\nabla_I\Gamma^{(2)}(I^0)=\omega+\Lambda\cdot I^0.$$

- En el cas no ressonant, es pot veure que la f.n. $\Gamma^{(N)}$ és única, independentment de l'algorisme utilitzat per a trobar-la. Així, els coeficients de la forma normal són uns invariants del hamiltonià original H. (vegeu comentaris a [Moser 68, p.9] i una prova d'un resultat anàleg per a aplicacions preservant àrea a [Moser56]).

- Si λ és no ressonant ($\mathcal{M}_\lambda = 0$), podem fer $N \to \infty$ i en principi obtenim la transformació i la forma normal com a sèries formals.

Teorema de Birkhoff ([Birkhoff])
Si λ és no ressonant, existeix una transformació simplèctica formal, $(x,y) = \Phi(\xi,\eta) = (\xi,\eta) + O_2(\xi,\eta)$, tal que la sèrie formal $H\circ\Phi = \Gamma$ només depèn dels productes $\xi_1\eta_1, \dots, \xi_n\eta_n$.

La funció Γ rep el nom de forma normal formal del hamiltonià H.
D'aquesta manera, a partir de les funcions $\rho_j = \xi_j\eta_j$, obtenim desfent el canvi n integrals primeres formals, $\rho_j^*(x,y) = \rho_j \circ \Phi^{-1}$, independents i en involució, del hamiltonià H: satisfan $\{\rho_j^*, H\} \equiv 0$.

- Si la transformació formal Φ donada pel teo. de Birkhoff és convergent en algun entorn de l'origen (radi de conv. >0), llavors les $\rho_j^*(x,y)$ són integrals primeres analítiques, i podem dir que H és integrable. Les solucions de H venen donades per $(x(t), y(t)) = \Phi(\xi(t), \eta(t))$, amb

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho_j}\,\xi_j\ ,\quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho_j}\,\eta_j\ ,\quad j=1,\dots,n,$$

i fixant condicions inicials $(x^0,y^0) = \Phi(\xi^0,\eta^0)$ i escrivint $\rho_j^0 = \xi_j^0\eta_j^0$,

$$\xi_j(t) = e^{\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho_j}(\rho^0)\,t}\,\xi_j^0\ ,\quad \eta_j(t) = e^{-\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho_j}(\rho^0)\,t}\,\eta_j^0\ ,\quad j=1,\dots,n. \qquad (1)$$

En el cas el·líptic tenim $\rho_j = i I_j$, i considerant $\Gamma(I_1,\dots,I_n)$ tenim $\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho_j} = -i\frac{\partial\Gamma}{\partial I_j}$.
En aquest cas, si la transf de Birkhoff és convergent l'origen serà un punt d'equilibri estable del hamiltonià H, i les trajectòries estan contingudes en els tors invariants n-dimensionals $\mathcal{T}_{I^0} = \{I = I^0\}$.

- Com hem vist, si la transformació de Birkhoff és convergent llavors el hamiltonià és integrable. Vegem ara un recíproc d'aquest fet.

Teorema. Siguin $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ funcions analítiques i en involució, de la forma $F_\ell = \sum_{j=1}^{n} \beta_{\ell j} x_j y_j + O_3(x,y)$, $\ell = 1,\dots,n$, amb $\beta_{\ell j} \in \mathbb{C}$, $\det(\beta_{\ell j}) \neq 0$.
Aleshores, existeix una transformació simplèctica Φ, analítica i propera a la identitat a l'origen ($\Phi = id + O_2$), tal que les funcions $F_\ell \circ \Phi$, $\ell = 1,\dots,n$, són funcions analítiques de $\xi_j\eta_j$.

D'aquesta manera, podem posar en f.n. de Birkhoff les funcions $F_1,\dots,F_n$ alhora.
El cas $n=2$ (de més interès, ja que només cal una 2ª i.p.) fou provat a [Rüssmann 64], i per a n qualsevol a [Vey78]. Una generalització sense imposar que les F_ℓ comencen a ordre 2 es troba a [Ito89]

Nota. Tot i que hi està relacionat, el teo. de Liouville-Arnold no es pot aplicar directament en les hipòtesis d'aquest teorema, ja que $F_1, \dots, F_n$ no són funcions independents en tot un entorn de l'origen (no ho són al mateix origen ni en els plans $x_j = y_j = 0$).

- Però en general la transformació del teorema de Birkhoff serà divergent (radi de conv. $=0$). Això és degut principalment als "petits divisors" $\langle k, \lambda \rangle = k_1\lambda_1 + \dots + k_n\lambda_n$ que apareixen en calcular els coeficients de la transformació a forma normal. Estem suposant que els $\langle k,\lambda\rangle$ són sempre no nuls, però poden ser arbitràriament propers a 0 per a certes k, la qual cosa pot impedir la convergència de la sèrie.

Tot i això, podem obtenir informació útil si ens conformem amb la forma normal de Birkhoff fins a un ordre finit $N+2$:

$$H \circ \Phi^{(N)} = \Gamma^{(N)} + R^{(N)},$$

En aquest cas, tenim funcions analítiques en algun entorn de l'origen (de radi r_N). A partir de la f.n. truncada $\Gamma^{(N)}$, que té $p_j = \xi_j \eta_j$ com a integrals primeres, obtenim funcions analítiques $p_j^{(N)} = p_j \circ (\Phi^{(N)})^{-1}$, que són "integrals primeres aproximades" per a H:

$$\dot{p}_j^{(N)} = \{p_j^{(N)}, H\} = \{p_j, \Gamma^{(N)} + R^{(N)}\} = \{p_j, R^{(N)}\} = O_{N+3}(x,y).$$

Així, les $p_j^{(N)}$ no són constants sobre les trajectòries però varien lentament prop de l'origen. P.ex. en el cas el·líptic, les trajectòries es mantindrien prop de tors n-dimensionals (que es poden trobar a partir de la f.n.) durant cert temps.

Es poden obtenir fites rigoroses de la desviació de les trajectòries respecte les que vindrien donades de manera anàloga a (1) (canviant Γ, Φ per $\Gamma^{(N)}, \Phi^{(N)}$), usant propietats bàsiques d'EDOs (desigualtats de Gronwall, etc.; vegeu [Siegel M, §30])

- En alguns casos no hi ha petits divisors i llavors sí que podem assegurar que la transformació de Birkhoff convergeix. Els únics casos són:

  * $n=1$: λ_1 qualsevol ($\neq 0$) $\begin{cases} \text{sella: } \lambda_1 \text{ real (vegeu [Moser56], suposant } H \text{ no autònom periòdic).} \\ \text{centre: } \lambda_1 = i\omega_1. \end{cases}$

  * $n=2$:
    - sella-centre: λ_1 real, $\lambda_2 = i\omega_2$
      $\langle k,\lambda\rangle = k_1\lambda_1 + i k_2 \omega_2 \longrightarrow |\langle k,\lambda\rangle| \geq \min(|\lambda_1|, |\omega_2|) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}.$
      (fita inf. independent de k)
    - sella complexa: $\lambda_1 = \gamma + i\delta$, $\lambda_2 = \gamma - i\delta$
      $\langle k,\lambda\rangle = (k_1+k_2)\gamma + i(k_1-k_2)\delta \longrightarrow |\langle k,\lambda\rangle| \geq \min(|\gamma|, |\delta|), \ \forall k \in \mathbb{Z}^2\setminus\{0\}.$

  (vegeu [Moser58b], [Giorgilli01]).

- Es pot provar que, dins del conjunt dels hamiltonians H analítics a l'origen, amb un radi de convergència $\geq r_0$ (amb qualsevol r_0 fixat), aquells per als quals la transformació de Birkhoff és <u>divergent</u> són densos (en certa topologia) [Siegel41].
  Els hamiltonians amb transformació de Birkhoff <u>convergent</u> formen un conjunt de la "1ª categoria de Baire" (unió numerable de conjunts "nowhere dense", en la mateixa topologia) [Siegel 54], i per tant són molt menys "abundants", tot i que també són densos (en una altra topologia més feble).
  Vegeu comentaris a [Moser 68] o bé [ArnoldKN, §7.4].

- Per al cas el·líptic, a [DouadyC83] es dóna un exemple explícit de hamiltonià C^∞ amb freqüències no ressonants, per al qual l'origen és un punt d'equilibri inestable. En canvi, no es coneix cap exemple explícit de hamiltonià analític amb la mateixa propietat.

<u>Forma normal de Gustavson</u> (cas <u>ressonant</u>)

- Considerem ara el cas en què $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és <u>ressonant</u>: $\mathcal{M}_\lambda \neq 0$.
  Llavors obtenim una <u>forma normal ressonant</u> o <u>de Gustavson</u>, que contindrà termes $x^k y^l$ amb $k - l \in \mathcal{M}$. Aquest tipus de f.n. va ser estudiat a [Gustavson66] com un mètode per a construir integrals primeres d'un hamiltonià (vegeu també [Moser 68]).

Teorema. Existeix una transformació simplèctica formal,
$(x, y) = \Phi(x, y) = (\xi, \eta) + O_2(\xi, \eta)$, tal que la sèrie formal $H \circ \Phi = \Gamma$
és en forma normal respecte $\mathcal{M}_\lambda$.

(si $\mathcal{M}_\lambda = 0$, tenim el teorema de Birkhoff).

Notem que, en general, la f.n. Γ no ve restringida a termes d'ordre parell:

$$\Gamma = H_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \cdots$$

En aquest cas, les funcions $p_j = \xi_j \eta_j$ no són, en general, integrals primeres de la forma normal. Però vegem que podem trobar algunes combinacions que sí ho seran. Suposem que $\dim \mathcal{M}_\lambda = d$ $(0 \leq d \leq n)$, és a dir, tenim una base: $\mathcal{M}_\lambda = \langle k^{(1)}, \dots, k^{(d)} \rangle = \{ m_1 k^{(1)} + \dots + m_d k^{(d)} : m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z} \}$.

Llavors el subspai $\mathcal{M}_\lambda^\perp = \{ \beta \in \mathbb{R}^n : \langle \beta, k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathcal{M}_\lambda \}$ té dim. $n-d$.
(observem que $\lambda \in \mathcal{M}_\lambda^\perp$). Segons la dim d podem parlar de ressonàncies simples, dobles, etc.

Per a tot $\beta \in \mathcal{M}^\perp$, la funció $F = \langle \beta, \rho \rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j \eta_j$ és integral primera formal de Γ:

$\{\Gamma, F\} \equiv 0$, ja que si $k-l \in \mathcal{M}_\lambda$,

tenim $\{ \xi^k \eta^l, \sum \beta_j \xi_j \eta_j \} = \sum \beta_j (k_j - l_j) \xi^k \eta^l = \langle \beta, k-l \rangle \xi^k \eta^l = 0$.

Prenent una base de $\mathcal{M}^\perp$, tenim $n-d$ i.p.'s de Γ, i desfent el canvi Φ tenim $n-d$ integrals primeres formals de H. (una d'elles pot ser $H_0 \circ \Phi^{-1}$), independents i en involució.
En el cas el·líptic, si alguna d'aquestes i.p.'s de Γ és def. positiva, aleshores es pot considerar que l'origen és un punt d'equilibri "quasi-estable" de H (vegeu [Moser 58a]).

- En el cas ressonant, la forma normal de Gustavson no es única (aplicant un altre algorisme es pot obtenir una f.n. diferent).

- En general, la transformació a f.n. de Gustavson és divergent, fins i tot si no hi ha petits divisors. P. ex. si $n=2$ i $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$, no hi ha petits divisors: | si $k \in \mathcal{M}_\lambda$, $\langle k, \lambda \rangle = 0$
| si $k \notin \mathcal{M}_\lambda$, $|\langle k, \lambda \rangle| = \left|\lambda_2 \left(k_1 \frac{p}{q} + k_2\right)\right| \geq \left|\frac{\lambda_2}{q}\right|$ (hem escrit $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = p/q$ irreductible)

(vegeu comentaris i un exemple a [Moser 68])

- Forma normal truncada

Donat un mòdul o subgrup $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$, si $\langle k, \lambda \rangle \neq 0$ $\forall k \notin \mathcal{M}$, $0 < |k| \leq N+2$ podem construir una transformació simplèctica $\Phi^{(N)}$ que porti H a forma normal de Gustavson fins a grau $N+2$:

$$H \circ \Phi^{(N)} = \Gamma^{(N)} + R^{(N)}, \qquad \Gamma^{(N)} = H_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_N.$$
$$R^{(N)} = O_{N+3}(\xi, \eta)$$

L'estudi de la f.n. truncada dóna molta informació sobre el hamiltonià original. P. ex., si la f.n. té una o.p. no degenerada (hiperbòlica o el·líptica), prou propera a l'origen, aplicant el teo. f. implícita podem deduir que el hamiltonià H ~~també~~ tindrà una o.p. propera. Centrant-nos en el cas d'un punt d'equilibri el·líptic, i passant a variables acció-angle,

$$\xi_j = -i\sqrt{I_j}\, e^{i\phi_j}, \quad \eta_j = \sqrt{I_j}\, e^{-i\phi_j},$$

tenim $\xi^k \eta^l = (-i)^{|k|} I^{(k+l)/2} e^{i\langle k-l, \phi \rangle}$, on escrivim $I^k = I_1^{k_1} \cdots I_n^{k_n}$.

Per tant, $\Gamma^{(N)}(\phi, I)$ és una sèrie de Poisson en $\sqrt{I_1}, \dots, \sqrt{I_n}, \phi_1, \dots, \phi_n$ que té el "caràcter de D'Alembert"

Def. Una sèrie de Poisson és $g(r, \phi) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^n \\ j \in \mathbb{Z}^n}} a_{mj} r^m e^{i\langle j, \phi \rangle}$,

i té el caràcter de D'Alembert si prové d'una sèrie de potències de $2n$ variables: $a_{mj} = 0$ llevat que $m \geq j$, $m - j = \dot{2}$

(vegeu [Meyer H, §IV.C3]).

En realitat, suposant que $\dim \mathcal{M} = d$, $\mathcal{M} = \langle k^{(1)}, \dots, k^{(d)} \rangle$, la f.n. $\Gamma^{(N)}$ només dependrà de $I_1, \dots, I_n$, i de les combinacions d'angles $\langle k^{(1)}, \phi \rangle, \dots, \langle k^{(d)}, \phi \rangle$.

Si el mòdul $\mathcal{M}$ és primitiu, podem fer un canvi simplèctic tal que els nous angles són $\psi_1 = \langle k^{(1)}, \phi \rangle, \dots, \psi_d = \langle k^{(d)}, \phi \rangle$. En efecte, es pot trobar una matriu R, amb coeficients enters i $\det R = 1$, que tingui $k^{(1)}, \dots, k^{(d)}$ com a d primeres files; llavors podem introduir noves coordenades (ψ, J) mitjançant el canvi simplèctic

$$\begin{pmatrix} \psi \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \\ & (R^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ I \end{pmatrix}$$

(el canvi està ben definit: $\phi \longmapsto \psi = R\phi$ és una bijecció de $\mathbb{T}^n$ ja que, si $\det R = 1$, llavors tant R com R^{-1} tenen coeficients enters)

En les noves coordenades, $\Gamma^{(N)}(\psi, J)$ només depèn de $J_1, \dots, J_n, \psi_1, \dots, \psi_d$. Per tant es pot reduir a un hamiltonià amb d graus de llibertat, amb $J_{d+1}, \dots, J_n$ com a paràmetres. De fet, $\Gamma^{(N)}, J_{d+1}, \dots, J_n$ són integrals primeres en involució.

Podem trobar les freqüències característiques de $\Gamma^{(N)}$ en les noves variables:

$$H_0 = \langle \lambda, \rho \rangle = \langle \omega, I \rangle = \langle \omega, R^T J \rangle = \langle R\omega, J \rangle,$$

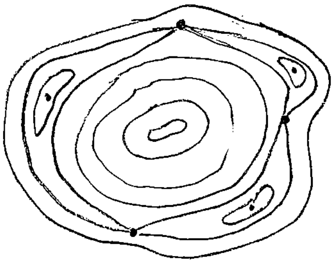
$\tilde{\omega} = R\omega = (0, \dots, 0, \tilde{\omega}_{d+1}, \dots, \tilde{\omega}_n)$ si hem escollit $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\lambda$; llavors, en el desenvolupament de $\Gamma^{(N)}$ les variables $J_1, \dots, J_d$ només apareixen amb grau $\geq 3/2$ (també es pot considerar $\Gamma^{(N)} - H_0$ com a i.p.)

- En el cas $\underline{d = 1}$ (ressonància simple), la forma normal $\Gamma^{(N)}$ és integrable; de fet es pot considerar com un hamiltonià amb 1 g.d.l. en les variables ψ_1, J_1 ($J_2, \dots, J_n$ paràmetres), molt senzill d'estudiar.

  Fixant $J_2^0, \dots, J_n^0$, el hamiltonià $\gamma(\psi_1, J_1) = \Gamma^{(N)}(\psi_1, J_1, J_2^0, \dots, J_n^0)$ pot tenir punts d'equilibri hiperbòlics i el·líptics, i separatrius que connecten els punts hiperbòlics, que poden presentar bifurcacions en variar $J_2^0, \dots, J_n^0$ (es pot trobar una classificació per a $n=2$ a [ArnoldKN, §8.3.2]; vegeu també [Arnold.MMMC, ap.7]).

Aquestes idees van ser aplicades inicialment en el hamiltonià d'Hénon-Heiles, obtenint una f.n. [Gustavson66] que permetia interpretar els resultats numèrics de [HénonH64].

Per exemple, el retrat de fase de $\gamma(\psi_1, J_1)$ pot ser del tipus:



Els punts d'equilibri hiperbòlics / el·líptics del hamiltonià reduït $\gamma(\psi_1, J_1)$ correspondran, quan afegim les variables $\psi_2, \dots, \psi_n$, a tors invariants $(n-1)$-dimensionals hiperbòlics / el·líptics de la f.n. $\Gamma^{(N)}$, amb connexions n-dimensionals entre els tors hiperbòlics. (homoclíniques o heteroclíniques). Les o.p. corresponen a tors inv. n-dim.

Per a $\underline{n=2}$, $d=1$, aquests tors invariants són òrbites periòdiques hiperbòliques / el·líptiques de $\Gamma^{(N)}$. Es poden trobar òrbites periòdiques del hamiltonià original H properes a les de la f.n. $\Gamma^{(N)}$, prenent aquestes com a aproximació inicial i veient-les com a punts fixos d'una aplicació de Poincaré. Les que siguin prou properes a l'origen generalment es conserven (si són no degenerades), però les separatrius es trencaran (splitting) indicant l'existència de zones caòtiques en el hamiltonià H.

Així, podem veure la f.n. $\Gamma^{(N)}$ com un hamiltonià a mig camí entre la part quadràtica H_0 (on tot són tors invariants n-dim.) i el hamiltonià complet H (on pot tenir lloc comportament caòtic)

- Nota: A vegades pot convenir construir la f.n. respecte un mòdul $\mathcal{M} \supsetneq \mathcal{M}_\lambda$, per incloure alguna "quasi-ressonància" d'ordre baix, és a dir, algun $k^* \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{M}_\lambda$, $|k^*|$ petit, amb $\langle k^*, \lambda \rangle \simeq 0$. D'aquesta manera s'eviten alguns dels "pitjors" petits divisors i s'obté una f.n. més adequada (vegeu [GDFGS89]).

- Propietats dels mòduls de ressonàncies (vegeu [Lochak M, ap. 3], [Cassels])

Tot mòdul o subgrup $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ admet una base:

$\mathcal{M} = \langle k^{(1)}, \dots, k^{(d)} \rangle = \{ m_1 k^{(1)} + \dots + m_d k^{(d)} : m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z} \}$; llavors $d = \dim \mathcal{M}$.

Els canvis de base es fan a través d'una matriu $d \times d$ amb $\det = \pm 1$.

Def. $\mathcal{M}$ és primitiu (o maximal) si no hi ha cap altre mòdul $\mathcal{M}'$, de la mateixa dimensió que $\mathcal{M}$, amb $\mathcal{M}' \supsetneq \mathcal{M}$

Tenim: $\mathcal{M}$ primitiu $\Longleftrightarrow$ [si $sk \in \mathcal{M}$, $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow k \in \mathcal{M}$]

P.ex.: Donat $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_\lambda$ sempre és primitiu.

El mòdul $\mathcal{M} = \langle (2,0), (0,3) \rangle \subset \mathbb{Z}^2$ no és primitiu.

Proposició. Si $\mathcal{M}$ és un mòdul primitiu, tota base $k^{(1)}, \dots, k^{(d)}$ de $\mathcal{M}$ es pot ampliar a una base de $\mathbb{Z}^n$.

En altres paraules, $\exists$ una matriu R, $n \times n$ (amb coefs. enters), $\det R = 1$, que té $k^{(1)}, \dots, k^{(d)}$ com a d primeres files.

Freqüències diofàntiques

- **Def.** Direm que un vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ és τ,γ-diofàntic ($\tau, \gamma > 0$ donats) si es compleixen les desigualtats
$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

(escrivim $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$, però també es poden considerar altres normes)

Es tracta d'una condició de tipus aritmètic que assegura que el vector ω es troba "prou lluny de ressonàncies", evitant que els petits divisors $\langle k, \omega \rangle$ siguin "massa petits".

Definim els conjunts
$$\Omega(\tau,\gamma) = \{\text{vectors } \tau,\gamma\text{-diofàntics de } \mathbb{R}^n\}$$
$$\Omega(\tau) = \bigcup_{\gamma > 0} \Omega(\tau,\gamma)$$

Proposició

(a) $\Omega(\tau) = \emptyset$ si $\tau < n-1$.

(b) $\Omega(n-1) \neq \emptyset$ i té mesura 0

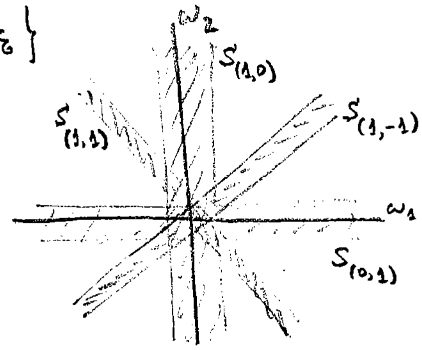
(c) $\Omega(\tau)$ té mesura total si $\tau > n-1$,
$$\mathrm{mes}\left((\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\tau,\gamma)) \cap B_R \right) \leq C(\tau) \cdot R^{n-1} \gamma$$

Per provar l'apartat (a), es pot considerar $\alpha = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}, \dots, \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ (suposant $\omega_n \neq 0$), i aplicar al vector α un teorema de Dirichlet sobre aproximacions successives (vegeu [LochakM, ap. 4], [Schmidt]).

L'apartat (b) és més difícil de provar, vegeu [Cassels].

El següent raonament permet provar l'apartat (c):

$$\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\tau,\gamma) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} S_k, \quad \text{essent } S_k = \left\{ \omega : |\langle k, \omega \rangle| < \frac{\gamma}{|k|^\tau} \right\}$$



Cada conjunt S_k és una "banda ressonant" al voltant de l'hiperplà $\langle k, \omega \rangle = 0$, d'amplada $\frac{2\gamma}{|k|^\tau \cdot |k|_2} \sim \frac{\gamma}{|k|^{\tau+1}}$.

Fent la intersecció amb una bola de radi R, resulta:
$$\mathrm{mes}(S_k \cap B_R) \sim R^{n-1} \cdot \frac{\gamma}{|k|^{\tau+1}}$$

Llavors,
$$\mathrm{mes}\left((\mathbb{R}^n \setminus \Omega(\tau,\gamma)) \cap B_R \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \mathrm{mes}(S_k \cap B_R) \sim R^{n-1} \gamma \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^{\tau+1}} \sim$$
$$\sim R^{n-1} \gamma \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\tau-n+2}}}_{\text{sumable si } \tau > n-1} = C(\tau) \cdot R^{n-1} \gamma$$

[usem: $\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z}^n : |k| = j\} \sim j^{n-1}$]

Observem que si $\tau > n-1$ i γ és prou petit, el conjunt $\Omega(\tau,\gamma)$ té mesura relativa $1-O(\gamma)$ però no conté cap subconjunt obert (ja que $\Omega(\tau,\gamma)\cap\mathbb{Q}^n=\phi$); es diu que $\Omega(\tau,\gamma)$ és un conjunt de tipus cantorià.

Entre les condicions perquè un vector sigui "prou lluny de ressonàncies", les condicions diofàntiques que hem definit són les més emprades, però n'hi ha de més generals, com la condició de Bryuno (vegeu p.ex. [Bryuno71])

- En el cas 2-dimensional, tenim: $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ no ressonant $\Leftrightarrow$ $\alpha=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ irracional.

Podem donar condicions diofàntiques sobre α per tal que es trobi "prou lluny dels racionals", definint:

$$\Delta(\tau,\gamma)=\left\{\alpha\in\mathbb{R}:\ \left|\alpha-p/q\right|\geq\frac{\gamma}{q^{\tau+1}}\quad\forall p,q\in\mathbb{Z},q>0\right\}$$

$$\Delta(\tau)=\bigcup_{\gamma>0}\Delta(\tau,\gamma).$$

Es compleix: $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega(\tau)\Leftrightarrow\alpha=\frac{\omega_1}{\omega_2}\in\Delta(\tau)$ (suposant $\omega_2\neq 0$)

En aquest cas, el conjunt $\Delta(1)$ té mesura 0, i $\Delta(\tau)$ té mesura total per a $\tau>1$.

Es pot provar que $\Delta(1)$ conté tots els irracionals quadràtics (arrels de polinomis de 2on grau amb coefs enters).

Tot això té una estreta relació amb la teoria de fraccions contínues (vegeu p.ex. [Lang])

Donat $\alpha\in\mathbb{R}^+$, podem considerar el seu desenvolupament en fracció contínua:

$$\alpha=[a_0;a_1,a_2,a_3,\dots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}},\qquad a_j\in\mathbb{Z}.$$

Si α és racional, el desenvolupament és finit.
Si α és irracional quadràtic, el desenvolupament és periòdic.

Truncant el desenvolupament podem obtenir aproximacions racionals d'un irracional α:

$$[a_0;a_1,a_2,\dots,a_j]=\frac{p_j}{q_j}\ \text{(irreductible)}$$

Podem calcular els p_j,q_j mitjançant fórmules recurrents, i p_j/q_j és el nombre racional que millor aproxima α, entre tots els p/q amb $q\leq q_j$. De fet, es compleix la desigualtat

$\left|\alpha-\frac{p_j}{q_j}\right|<\frac{1}{q_j\,q_{j+1}}$, que implica que $\lim_{j\to\infty}\frac{p_j}{q_j}=\alpha$. Aquesta desigualtat ens dóna el teo. de Dirichlet (esmentat abans) en el cas $n=2$, i permet deduir que $\Delta(\tau)=\phi$ si $\tau<1$.

Dos nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s'anomenen "equivalents" si $\beta = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$, amb $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc=\pm 1$. En termes de fraccions contínues, $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ i $\beta = [\beta_0; \beta_1, \beta_2, \dots]$ són "equivalents" si i només si les fraccions contínues coincideixen a partir de cert terme, és a dir, $\exists\, j_1, j_2 : a_{j_1+j} = b_{j_2+j} \;\forall j \geq 0$.

Fixant $\tau = 1$, es pot veure que els nombres $\alpha \in \Delta(1)$ que admeten γ màxima (i, per tant, són els més mal aproximables per racionals) són el nombre d'or $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, \dots]$ i els seus equivalents $\beta = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_k, 1, 1, 1, \dots]$, anomenats "nombres nobles". Aquests nombres satisfan la condició diofàntica amb la constant (asimptòtica) $\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Per a qualsevol altre nombre $\alpha \in \Delta(1)$, es té $\gamma \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$.

(vegeu [Lochak92] per a més informació)

- Fites de la solució de l'equació homològica.

La condició diofàntica ens dóna un control quantitatiu dels petits divisors $\langle k, \omega \rangle$, que permet fitar la solució de l'eq. homològica en algun domini complex.

Considerem una banda o entorn complex de $\mathbb{T}^n$, d'amplada ρ:

$$\mathcal{U}_\rho = \{ \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : \operatorname{Re}\phi \in \mathbb{T}^n,\ |\operatorname{Im}\phi_j| < \rho \ \ \forall j = 1, \dots, n \}$$

Donada $F : \mathcal{U}_\rho \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica (2π-periòdica en $\phi_1, \dots, \phi_n$), definim la norma $\|F\|_\rho = \sup_{\phi \in \mathcal{U}_\rho} |F(\phi)|$ (la suposarem $< \infty$).

Sigui $\omega \in \mathbb{R}^n$ no ressonant. Suposem que la funció F té mitjana nul·la: $\overline{F} = \int_{\mathbb{T}^n} F(\phi)\, d\phi_1 \cdots d\phi_n = 0$. Llavors podem plantejar l'eq. homològica (una EDP lineal)

$$\boxed{\left\langle \omega, \frac{\partial W}{\partial \phi} \right\rangle = F} \qquad (1)$$

Nota: Estem considerant el cas no ressonant ($\mathcal{M} = 0$). La "forma normal" d'una funció $F(\phi)$ és $F_0 = \overline{F}$, que en aquest cas s'anul·la i per això no hem de considerar la "part ressonant" a l'eq. (1)

Lema de petits divisors

Sigui $\omega \in \Omega(\tau,\gamma)$, i $F(\phi)$ analítica sobre $\mathcal{U}_\rho$ amb $\bar{F}=0$. Aleshores, donat $0<\delta<\rho$ l'eq. homològica (1) té una solució $W(\phi)$, analítica sobre $\mathcal{U}_{\rho-\delta}$, que compleix
$$\boxed{\|W\|_{\rho-\delta} \le \frac{C(\tau,n)}{\gamma\cdot\delta^\tau}\|F\|_\rho}$$

"Prova" (parcial).

* Formalment, podem resoldre (1) en termes dels coeficients de Fourier:

si $F(\phi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} F_k e^{i\langle k,\phi\rangle}$, obtenim $W(\phi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} W_k e^{i\langle k,\phi\rangle}$

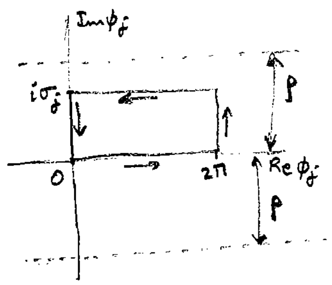
amb els coeficients $W_k = \dfrac{F_k}{i\langle k,\omega\rangle}$, $k\neq 0$.

* Decreixement exponencial dels coeficients:

comprovem que $\boxed{|F_k| \le \|F\|_\rho\cdot e^{-|k|\rho}, \quad \forall k\in\mathbb{Z}^n.}$

$$F_k=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} F(\phi)\,e^{-i\langle k,\phi\rangle}d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} F(\phi+i\sigma)\,e^{-i\langle k,\phi+i\sigma\rangle}d\phi = \frac{e^{\langle k,\sigma\rangle}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} F(\phi+i\sigma)\,e^{-i\langle k,\phi\rangle}d\phi$$

essent $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $|\sigma_1|,\dots,|\sigma_n|<\rho$.



Deduïm $|F_k| \le \|F\|_\rho\cdot e^{\langle k,\sigma\rangle}$, sempre que $|\sigma_1|,\dots,|\sigma_n|<\rho$.

Escollint $\sigma_j = -\mathrm{sgn}(k_j)\,b\rho$, obtenim $|F_k| \le \|F\|_\rho\cdot e^{-|k|b\rho}$ $\forall b<1$, i només cal fer $b\to 1$.

* Trobem una fita exponencial per als coeficients de la solució:

$$|W_k| = \frac{|F_k|}{|\langle k,\omega\rangle|} \le \frac{\|F\|_\rho}{\gamma}\cdot|k|^\tau e^{-|k|\rho} \le \frac{A(\tau)}{\gamma\delta^\tau}\|F\|_\rho\cdot e^{-|k|(\rho-\delta)},$$ essent $0<\delta<\rho$ donat.

Hem usat: si $x=|k|\ge 0$, $f(x)=x^\tau e^{-\delta x}$ té com a valor màxim $f(\tau/\delta)=\left(\frac{\tau}{e\delta}\right)^\tau=\frac{A(\tau)}{\delta^\tau}$

* Sumem, però aplicant la fita anterior amb $\delta/2$ en lloc de δ:

$$\|W\|_{\rho-\delta} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |W_k|\,e^{|k|(\rho-\delta)} \le \frac{A(\tau)}{\gamma(\delta/2)^\tau}\|F\|_\rho \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} e^{-|k|\delta/2} \le \frac{C(\tau,n)}{\gamma\delta^{\tau+n}}\|F\|_\rho,$$

fent servir que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} e^{-|k|\delta/2} \le 2^n \sum_{k_1,\dots,k_n\ge 0} e^{-k_1\delta/2}\cdots e^{-k_n\delta/2} = \left(2\sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\delta/2}\right)^n = \left(\frac{2}{1-e^{-\delta/2}}\right)^n \le \frac{B(n)}{\delta^n}$

(en realitat hem suposat δ prou petit)

Nota. Hem obtingut l'exponent $\tau+n$, però hem considerat que tots els denominadors $|\langle k,\omega\rangle|$ podien ser tan petits com ho permet la condició diofàntica, quan això només passa per unes poques k. Per obtenir l'exponent òptim τ, cal tenir en compte la proporció de denominadors $|\langle k,\omega\rangle|$ que realment són "petits divisors" (vegeu [Rüssmann 75] o també [Salamon 04]).

Estabilitat efectiva.

- Considerem un hamiltonià quasi-integrable, amb n graus de llibertat, en variables acció-angle:

$$H(\phi,I) = h(I) + f(\phi,I), \quad \|f\| = \varepsilon$$

$$(\phi,I) \in \mathbb{T}^n \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^n.$$

Les equacions hamiltonianes són

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega(I) + \dfrac{\partial f}{\partial I}(\phi,I), \\ \dot{I} = -\dfrac{\partial f}{\partial \phi}(\phi,I) \end{cases}$$

amb $\omega(I) = \nabla h(I)$. Com que $\dot{I} = O(\varepsilon)$, l'evolució de les variables d'acció $I(t)$ serà lenta, però això no impedeix que puguin existir trajectòries inestables (en el sentit que puguem tenir $|I(t) - I^0| = O(1)$ per a t prou gran, encara que ε sigui petita). Aquest fenomen rep el nom de difusió d'Arnold.

El teorema de Nekhoroshev dóna un confinament de les variables d'acció durant un temps exponencialment gran respecte el paràmetre ε. D'aquesta manera, podem parlar d'estabilitat efectiva, ja que la possible inestabilitat només es manifesta a temps molt grans.

En línies generals, el teorema s'enuncia així:

> Suposem certa hipòtesi de tipus geomètric sobre h. Aleshores, si $\varepsilon \le \varepsilon_0$ i per a tota condició inicial $(\phi^0, I^0) \in \mathbb{T}^n \times G$,
>
> $$|I(t) - I^0| \le r_0\, \varepsilon^b \qquad \forall\, |t| \le T_0\, e^{(\varepsilon_0/\varepsilon)^a},$$
>
> essent $a, b, \varepsilon_0, r_0, T_0 > 0$ constants.

- Steepness i quasiconvexitat. La hipòtesi de tipus geomètric que cal imposar en el teo. de Nekhoroshev permet assegurar l'estabilitat prop de ressonàncies, ja que en principi les zones ressonants poden constituir la principal font d'inestabilitat.

A la prova original [Nekhoroshev77], s'imposa una hipòtesi d'escarpament o steepness molt general. Entre les funcions escarpades, s'inclouen les quasiconvexes (i entre aquestes les convexes), per a les quals la prova del teo. de Nekhoroshev esdevé més simple (vegeu p.ex. [BenettinGG85], [BenettinG86]).

Def La funció h és quasiconvexa en el domini $G \subset \mathbb{R}^n$ si, per a tot $I \in G$,

$$\langle \omega(I), v \rangle = 0 \implies v^T D^2 h(I)\, v \ne 0,$$

essent $\omega = \nabla h$ (és a dir, $D^2 h(I)$ definida positiva o negativa sobre l'hiperplà $\langle \omega(I) \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^n$, $\forall I \in G$)

És fàcil comprovar:

h quasiconvexa $\Longleftrightarrow$ les seves hipersuperfícies de nivell són convexes en tots els seus punts (contacte d'ordre 2 amb l'hiperplà tangent)

La quasiconvexitat és una condició genèrica per a $n=2$, però no per a $n \geq 3$.

En canvi, la condició de steepness és genèrica per a qualsevol n. Ve a imposar, en tot punt $I \in G$, una fita inferior per a la curvatura (ordre ≥ 2) de les hipersuperfícies de nivell respecte qualsevol pla que passi per I (vegeu [Nekhoroshev 77], [Niederman 06], i també [LochakM, ap.9] per a comentaris).

- Les constants $a, b > 0$ s'anomenen exponents d'estabilitat, i convé que siguin el més grans possible.

  Per al cas quasiconvex, han estat obtinguts els exponents $a = b = \frac{1}{2n}$ (vegeu [LochakN 92, Pöschel 93]). Precisament, una conjectura de Chirikov havia establert abans que l'exponent $a = 1/2n$ és l'òptim ([Chirikov 79]).

  En el cas de steepness, els exponents d'estabilitat a i b han estat obtinguts a [Niederman 04].
  Com a referència general sobre fites exponencials en hamiltonians quasi-integrables, vegeu [Giorgilli 03].

- La prova del teorema de Nekhoroshev es divideix habitualment en dues parts, analítica i geomètrica.

  - Part analítica. Fixat un mòdul de ressonàncies $\mathcal{M}$, es construeix en una regió adequada una forma normal fins ordre $N = N(\varepsilon)$, que tendeix a ∞ per a $\varepsilon \to 0$, obtenint una resta exp. petita resp. ε.

  - Part geomètrica. Es divideix l'espai d'accions G en regions associades a cada mòdul de ressonàncies $\mathcal{M}$. Per a cada mòdul $\mathcal{M}$, la f.n. truncada depèn de combinacions $\langle k, \phi \rangle$ amb $k \in \mathcal{M}$, i per tant $I(t)$ es mou sobre el pla $\Pi_{\mathcal{M}}(I^0)$ (en la direcció del subespai vectorial generat per $\mathcal{M}$), o prop d'ell si afegim la resta. Llavors la quasiconvexitat (o la condició de steepness) permet fitar el desplaçament al llarg d'aquest pla.
    En el cas $\mathcal{M} = 0$, tot això no és necessari ja que el pla es redueix al punt I^0 (de fet, a un entorn gran afegint la resta).

Notes. 1) Per obtenir un temps d'estabilitat exp. gran en ε, cal tenir una fita exp. petita de la resta, però això no és una funció analítica de ε. Si truquem el procés a un ordre fixat N (d'acord amb la teoria clàssica de pertorbacions) només podem obtenir un temps $\sim 1/\varepsilon^N$. Com que el procés no convergeix quan $N \to \infty$, per millorar les fites hem de prendre $N = N(\varepsilon)$.

2) El teor. de Nekhoroshev no ens diu que $\dot{I}(t)$ sigui exp. petita, sinó que dóna una fita de $|I(t) - I^0|$, vàlida durant un temps gran i compatible amb $\dot{I} = O(\varepsilon)$.

- Un altre cas per al qual es poden donar fites d'estabilitat efectiva és el d'una pertorbació d'un sistema d'oscil·ladors harmònics:

$$H(\phi, I) = \langle \omega, I \rangle + f(\phi, I), \qquad (1)$$

on el vector de freqüències ω és diofàntic. Suposarem f analítica sobre un entorn complex de $\mathbb{T}^n \times G$, que escriurem $A_\rho = \mathcal{U}_\rho \times \mathcal{V}_\rho$, essent

$\mathcal{U}_\rho$ = banda complexa al voltant de $\mathbb{T}^n$, d'amplada ρ,

$\mathcal{V}_\rho = \{ I \in \mathbb{C}^n : |I - I'| < \rho$ per algun $I' \in G \}$

(usem la norma del màxim: $|x| = |x|_\infty$),

i definim la norma $\displaystyle \|f\|_\rho = \sup_{(\phi, I) \in A_\rho} |f(\phi, I)|$

Teorema. Considerem el hamiltonià (1), on ω és τ, γ-diofàntic i f és analítica sobre $A_\rho \supset \mathbb{T}^n \times G$; escrivim $\varepsilon = \|f\|_\rho$. Aleshores, si $\varepsilon \le \varepsilon_0$ i per a tota condició inicial $(\phi^0, I^0) \in \mathbb{T}^n \times G$,

$$|I(t) - I^0| \le r_0 \varepsilon^b \quad \forall |t| \le T_0\, e^{(\varepsilon_0/\varepsilon)^a}, \qquad a = b = \frac{1}{\tau + 2},$$

essent $\varepsilon_0, r_0, T_0 > 0$ constants (depenents de τ, n, ρ, γ).

Prova. Partint de $\Gamma^{(0)} = 0$, $R^{(0)} = f$, a partir de hamiltonians generadors $W^{(m)}$ anirem construint transformacions simplèctiques $\Phi^{(m)}$ de manera que

$$H^{(m)} = H^{(m-1)} \circ \Phi^{(m)} = \underbrace{h(I) + \Gamma^{(m)}(I)}_{\substack{\text{en forma normal} \\ \text{respecte } \mathcal{M}_\omega = 0 \\ (\omega \text{ no ressonant})}} + R^{(m)}(\phi, I), \qquad h(I) = \langle \omega, I \rangle$$

Per descriure cada pas $m = 1, 2, \dots$, partim d'un hamiltonià de la forma $H = h + \Gamma + R$, i considerem un hamiltonià generador W definit com a solució de l'eq. homològica

$$\left\langle \omega, \frac{\partial W}{\partial \phi}(\phi, I) \right\rangle = R(\phi, I) - \overline{R}(I),$$

essent $\overline{R}(I)$ la mitjana de $R(\phi, I)$ sobre $\phi \in \mathbb{T}^n$. Prenent $\Phi = \Phi_1$ com el flux temps 1 associat a W, obtenim un nou hamiltonià $H^* = H \circ \Phi = h + \Gamma^* + R^*$,

amb

$$\Gamma^* = \Gamma + \overline{R}$$

$$R^* = -\int_0^1 (1 - \tau) \{ R - \overline{R}, W \} \circ \Phi_\tau \, d\tau + \int_0^1 \{ \Gamma + R, W \} \circ \Phi_\tau \, d\tau, \qquad (2)$$

on Φ_τ és el flux temps τ de W. Hem usat: $\{h, W\} = -\left\langle \omega, \frac{\partial W}{\partial \phi} \right\rangle = -(R - \overline{R})$

(vegeu l'apartat dedicat a formes normals de hamilt. quasi-integrables)

Suposant H analític sobre el domini complex A_ρ, a partir de $\|R\|_\rho$ volem obtenir una fita de $\|R^*\|_{\rho-\delta}$, per a $\delta>0$ donada (reduïm una mica el domini complex)

* <u>Desigualtats de Cauchy</u>. Si F és analítica sobre A_ρ,

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial \phi}\right\|_{\rho-\delta} \le \frac{\|F\|_\rho}{\delta}, \quad \left\|\frac{\partial F}{\partial I}\right\|_{\rho-\delta} \le \frac{\|F\|_\rho}{\delta}$$

Es basen en la propietat següent de les funcions analítiques: per a una funció $F(z)$, d'una variable complexa,

$$\frac{1}{s!}F^{(s)}(z^*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z^*|=\delta}\frac{F(z)}{(z-z^*)^{s+1}}dz, \text{ i per tant } \|F^{(s)}\|_{\rho-\delta} \le \frac{s!}{\delta^s}\|F\|_\rho$$

En general, per a una funció $F(z_1,\dots,z_m)$ de m variables complexes,

$$\left\|\frac{\partial^s F}{\partial z_1^{s_1}\cdots\partial z_m^{s_m}}\right\|_{\rho-\delta} \le \frac{s_1!\cdots s_m!}{\delta_1^{s_1}\cdots\delta_m^{s_m}}\|F\|_\rho \quad \text{(en el nostre cas, prenem } \delta_1=\dots=\delta_m)$$

* <u>Parèntesi de Poisson</u>. Donades F, G analítiques sobre A_ρ,

$$\|\{F,G\}\|_{\rho-\delta} \le \sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial F}{\partial \phi_j}\frac{\partial G}{\partial I_j} - \frac{\partial F}{\partial I_j}\frac{\partial G}{\partial \phi_j}\right\|_{\rho-\delta} \le \frac{2n}{\delta^2}\|F\|_\rho\|G\|_\rho$$

* <u>Fita del flux</u>. Donat un camp vectorial X, amb $\|X\|_\rho \le \delta$, (màxim dels components)
tenim $\Phi_z : A_{\rho-|z|\delta} \longrightarrow A_\rho$, amb $\|\Phi_z - id\|_{\rho-|z|\delta} \le |z|\cdot\|X\|_\rho$, $\Phi_z(A_{\rho-|z|\delta}) \supset A_{\rho-2|z|\delta}$.
En efecte; com que $\frac{d}{dz}\Phi_z(z) = X(\Phi_z(z))$ deduïm que $|\Phi_z(z)-z| \le |z|\,\|X\|_\rho \le |z|\delta$ mentre tinguem $\Phi_z(z)\in A_\rho$, cosa que es complirà si $z\in A_{\rho-|z|\delta}$.
La inclusió ve de considerar el flux invers Φ_{-z}.

A partir d'aquests resultats tècnics, obtenim les fites per a un pas de f.n. dividint la reducció δ en 3 parts.

Pel lema de petits divisors,

$$\|W\|_{\rho-\delta/3} \le \frac{C}{\gamma(\delta/3)^\tau}\|R-\bar{R}\|_\rho \le \frac{2\cdot 3^\tau C}{\gamma\delta^\tau}\|R\|_\rho,$$
$$C = C(\tau, n)$$

Tenim $\|W\|_{\rho-\delta/3} \le \frac{\delta^2}{9}$ si suposem $\|R\|_\rho \le \frac{\gamma\delta^{\tau+2}}{2\cdot 3^{\tau+2}C}$.

Llavors el camp hamiltonià $X_W = \left(\frac{\partial W}{\partial I}, -\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)$ té la fita $\|X_W\|_{\rho-2\delta/3} \le \frac{3}{\delta}\|W\|_{\rho-\delta/3} \le \frac{\delta}{3}$, i per al flux Φ_z, $0\le z\le 1$, tenim $\Phi_z : A_{\rho-\delta} \longrightarrow A_{\rho-2\delta/3}$ amb $\|\Phi_z - id\|_{\rho-\delta} \le \frac{\delta}{3}$,
amb $\|\Phi_z - id\|_{\rho-\delta} \le \|X_W\|_{\rho-2\delta/3} \le \frac{2\cdot 3^{\tau+1}C}{\gamma\delta^{\tau+1}}\|R\|_\rho$.

A partir de les fórmules (2), també tenim:

$$\|\Gamma^*\|_\rho \le \|\Gamma\|_\rho + \|\overline{R}\|_\rho \le \|\Gamma\|_\rho + \|R\|_\rho .$$

$$\|R^*\|_{\rho-\delta} \le \int_0^1 (1-z)\,\|\{R-\overline{R},W\}\circ\Phi_z\|_{\rho-\delta} + \int_0^1 \|\{\Gamma+R,W\}\circ\Phi_z\|\,dz \le$$

$$\le \frac{1}{2}\|\{R-\overline{R},W\}\|_{\rho-\frac{2\delta}{3}} + \|\{\Gamma+R,W\}\|_{\rho-\frac{2\delta}{3}} \le$$

$$\le \frac{2n}{\delta^2}\left(\frac{1}{2}\|R-\overline{R}\|_{\rho-\delta/3} + \|\Gamma+R\|_{\rho-\delta/3}\right)\cdot\|W\|_{\rho-\delta/3} \le \frac{4n\cdot 3^z C}{\gamma\delta^{z+2}}\left(\|\Gamma\|_{\rho-\delta/3} + 2\|R\|_{\rho-\delta/3}\right)\cdot\|R\|_\rho .$$

En resum (i simplificant una mica), donat $H=h+\Gamma+R$ analític sobre A_ρ, amb $\|R\|_\rho \le \frac{\gamma\delta^{z+2}}{\widetilde{C}}$, existeix $\Phi: A_{\rho-\delta} \longrightarrow A_\rho$ simplèctica, $\|\Phi-id\|_{\rho-\delta} \le \frac{\widetilde{C}}{\gamma\delta^{z+1}}\cdot\|R\|_\rho$, $\Phi(A_{\rho-\delta}) \supset A_{\rho-2\delta}$,

tal que $H\circ\Phi = h+\Gamma^*+R^*$ complex: $\|\Gamma^*\|_\rho \le \|\Gamma\|_\rho + \|R\|_\rho$,

$$\|R^*\|_\rho \le \frac{\widetilde{C}}{\gamma\delta^{z+2}}\left(\|\Gamma\|_\rho + \|R\|_\rho\right)\cdot\|R\|_\rho ,$$

essent $\widetilde{C} = \widetilde{C}(z,n) = 8n\cdot 3^{z+2}C(z,n)$ una constant.

Ara considerem això com el pas m del procés iteratiu, escollint una successió de reduccions δ_m. En el pas m, partim de $H^{(m-1)} = h+\Gamma^{(m-1)}+R^{(m-1)}$ analític sobre $A_{\rho_{m-1}}$ i obtenim $\Phi^{(m)}$ simplèctica, $H^{(m)} = H^{(m-1)}\circ\Phi^{(m-1)} = h+\Gamma^{(m)}+R^{(m)}$ analític sobre A_{ρ_m}, $\rho_m = \rho_{m-1}-\delta_m$ (començem amb $\rho_0=\rho$). Anomenant $a_m = \|\Gamma^{(m)}\|_{\rho_m}$, $\varepsilon_m = \|R^{(m)}\|_{\rho_m}$, tenim:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon \\ a_m \le a_{m-1}+\varepsilon_{m-1} \\ \varepsilon_m \le \dfrac{\widetilde{C}}{\gamma\delta_m^{z+2}}\,(a_{m-1}+\varepsilon_{m-1})\cdot\varepsilon_{m-1} \end{cases} \qquad \|\Phi^{(m)}-id\|_{\rho_m} \le \frac{\widetilde{C}}{\gamma\delta_m^{z+1}}\,\varepsilon_{m-1}$$

mentre es compleixi $\varepsilon_{m-1} \le \dfrac{\gamma\delta_m^{z+2}}{\widetilde{C}}$.

Si intentem fer $m\to\infty$, cal prendre $\delta_m\to 0$ i llavors no podem aconseguir $\varepsilon_m\to 0$.

De fet, s'observa que inicialment ε_m decreix, i després torna a créixer (procés <u>semi-convergent</u>). Farem doncs un <u>nombre finit</u> de passos, $m=1,\dots,N$, amb N a escollir per tal que ε_N sigui mínima.

Prenem $\delta_m = \rho/2N$, $m=1,\dots,N$, i així ρ_m decreix de ρ fins a $\rho/2$.

Veurem que, si escollim $N=N(\varepsilon)$ adequadament, es compleixen les desigualtats:

$$\begin{cases} a_m \le \left(1+\frac{1}{e}+\dots+\frac{1}{e^{m-1}}\right)\cdot\varepsilon \le 2\varepsilon \\ \varepsilon_m \le \frac{\varepsilon}{e^m}, \qquad m=0,\dots,N. \end{cases}$$

Per a $m=0$ és cert; per inducció suposem-ho cert per a $m-1$, i vegem-ho per a m.

En cada pas cal imposar $\varepsilon_{m-1} \le \frac{\gamma\,(\rho/_{2N})^{\tau+2}}{\tilde{C}}$, i obtenim $\varepsilon_m \le \frac{\tilde{C}}{\gamma(\rho/_{2N})^{\tau+2}}\cdot 2\varepsilon\cdot\varepsilon_{m-1} \le \frac{\varepsilon_{m-1}}{e}$.

Aquestes desigualtats es compliran si $\varepsilon \le \frac{\gamma\,(\rho/_{2N})^{\tau+2}}{2e\,\tilde{C}} = \frac{c_0}{(N/_2)^{\tau+2}}$,

essent $c_0 = c_0(\tau,n,\rho,\gamma) = \frac{\gamma\,(\rho/_4)^{\tau+2}}{2e\cdot\tilde{C}(\tau,n)}$.

Per tant, hem d'escollir $N=N(\varepsilon) \le 2\cdot\left(\frac{c_0}{\varepsilon}\right)^{1/(\tau+2)}$, p. ex. $N=\left[2\left(\frac{c_0}{\varepsilon}\right)^{1/(\tau+2)}\right] \ge \left(\frac{c_0}{\varepsilon}\right)^{1/(\tau+2)}$ (si $c_0/\varepsilon \ge 1$),

i llavors obtenim: $\boxed{\varepsilon_N \le \frac{\varepsilon}{e^N} \le \varepsilon\, e^{-(c_0/\varepsilon)^{1/(\tau+2)}}}$ (*) resta exponencialment petita resp. ε.

Escrivint $\Psi^{(N)} = \Phi^{(1)}\circ\dots\circ\Phi^{(N)}$, tenim $\Psi^{(N)}: A_{\rho/2} \longrightarrow A_\rho$, $\Psi^{(N)}(A_{\rho/2}) \supset A_{\rho_{N+1}} \supset \mathbb{T}^n\times G$,

$$\|\Psi^{(N)}-id\|_{\rho/2} \le \sum_{m=1}^{N}\|\Phi^{(m)}-id\|_{\rho_m} \le \sum_{m=1}^{N}\frac{\tilde{C}}{\gamma(\rho/_{2N})^{\tau+1}}\,\varepsilon_{m-1} \le \frac{\tilde{C}\,(N/2)^{\tau+1}}{\gamma(\rho/4)^{\tau+1}}\cdot 2\varepsilon \le c_0'\cdot\varepsilon^{1/(\tau+2)} \le \rho/6 \quad (**)$$

$$\left[\begin{aligned}\Psi^{(N)}(z) = &\left(\Phi^{(1)}\circ\Phi^{(2)}\circ\dots\circ\Phi^{(N)}(z) - \Phi^{(2)}\circ\dots\circ\Phi^{(N)}(z)\right)+\dots+\\ &+\left(\Phi^{(N-1)}\circ\Phi^{(N)}(z)-\Phi^{(N)}(z)\right)+\left(\Phi^{(N)}(z)-z\right)\end{aligned}\right]$$

si ε prou petit, $c_0' = c_0'(\tau,n,\rho,\gamma)$, on hem usat la def. de $N(\varepsilon)$

Així tenim: $H^{(N)} = H\circ\Psi^{(N)} = \langle\omega,I\rangle + \Gamma^{(N)}(I) + R^{(N)}(\phi,I)$, amb la fita (*) per a $R^{(N)}$.

Donada una trajectòria $z(t)=(\phi(t),I(t))$ de H, amb qualsevol condició inicial $z^0=(\phi^0,I^0)\in\mathbb{T}^N\times G$, escrivim $z(t)=\Psi^{(N)}(z^*(t))$, amb $z^*(0)\in A_{\rho/6}$, $z^*(t)\in A_{\rho/3}$, $z(t)\in A_{\rho/2}$, i fitem:

$$|I(t)-I^0| \le \underbrace{|I(t)-I^*(t)|}_{\overset{\wedge}{(**)}} + \underbrace{|I^*(t)-I^*(0)|} + \underbrace{|I^*(0)-I^0|}_{\overset{\wedge}{(**)}}$$

ho fitem per:

$$\left[\begin{aligned}&\dot{I}^*(t) = -\frac{\partial R^{(N)}}{\partial\phi}(z^*(t)) \Rightarrow |I^*(t)-I^*(0)| \le |t|\left\|\frac{\partial R^{(N)}}{\partial\phi}\right\|_{\rho/3} \le |t|\,\frac{\|R^{(N)}\|_{\rho/2}}{\rho/6} \overset{(*)}{\le}\\ &\le |t|\cdot\frac{6}{\rho}\cdot\varepsilon\cdot e^{-(c_0/\varepsilon)^{1/(\tau+2)}} \le (**),\ \text{si } |t|\le T_0\, e^{(c_0/\varepsilon)^{1/(\tau+2)}};\\ &\text{i per aquests valors de } t \text{ també s'assegura que } z^*(t)\in A_{\rho/3}.\end{aligned}\right.$$

Nota. Els exponents $a=b=\frac{1}{\tau+2}$ per a una pertorbació d'un sistema d'oscil·ladors harmònics, es poden millorar amb una prova més sofisticada.

Així, es poden obtenir els exponents $a=\frac{1}{\tau+1}$, $b=1$ fitant directament els camps vectorials hamiltonians en comptes de les funcions hamiltonianes (així s'evita utilitzar tantes vegades les desigualtats de Cauchy), i considerant diferents reduccions de domini en els angles i les accions; vegeu [Fassò 90].

- Estabilitat efectiva prop d'un punt d'equilibri el·líptic.

Recordem que en aquest cas el hamiltonià es pot escriure en la forma

$$H(q,p)=\sum_{m=0}^{\infty} H_m, \quad \text{amb } H_0=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j(q_j^2+p_j^2), \quad H_m \text{ polinomi homogeni de grau } m+2.$$

Passant a variables acció-angle, podem considerar H com una pertorbació d'un sistema d'oscil·ladors harmònics: $H_0=\langle\omega,I\rangle$, i suposem que $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ és diofàntic. Ara bé, en aquest cas no podem aplicar directament el teorema anterior, ja que la singularitat que el canvi a variables acció-angle presenta en els plans $q_j=p_j=0$ obliga a excloure del domini un entorn d'aquests plans. Llavors, les fites que obtindríem no són vàlides per a totes les condicions inicials.

No obstant això, fites "globals" d'estabilitat efectiva prop d'un punt d'equilibri el·líptic es poden obtenir fent servir formes normals per a punts d'equilibri. S'obtenen fites del tipus següent: donat $\sigma>1$, per a tota trajectòria $z(t)=(q(t),p(t))$ amb $r=|z(0)|\le r_0$, es compleix que $|z(t)|\le\sigma r_0$ si $|t|\le T_0\, e^{(r_0/r)^a}$, essent $a=1/(\tau+1)$. (vegeu [Giorgilli DFGS89])

Teoria KAM

- Donat un hamiltonià quasi-integrable amb n graus de llibertat,

$$H(\phi,I) = h(I) + f(\phi,I), \qquad f = O(\varepsilon),$$

$(\phi,I)\in\mathbb{T}^n\times G$, $G\subset\mathbb{R}^n$, recordem que per a $\varepsilon=0$ tots els tors n-dimensionals

$$\mathcal{T}_I^0 = \mathbb{T}^n\times\{I\} = \{(\phi,I) : \ \phi\in\mathbb{T}^n\},$$

amb $I\in G$, són invariants. El flux (lineal) ve donat pel vector de freqüències $\omega(I)=\nabla h(I)$.

El teorema KAM (Kolmogorov – Arnold – Moser) ens diu, sota una hipòtesi de no degeneració adequada, que si ε és prou petit llavors la major part dels tors invariants n-dimensionals es conserven, amb certa deformació, en el sistema pertorbat. Així, per a la major part d'accions $I\in G$, tindrem un tor n-dimensional $\mathcal{T}_I^\varepsilon$, invariant pel flux de H. Aquest tor serà una varietat que podrem parametritzar per

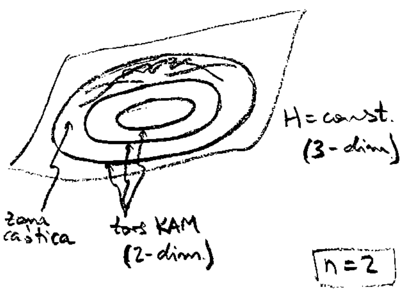
$$\mathcal{T}_I^\varepsilon = \{(A_I^\varepsilon(\theta), B_I^\varepsilon(\theta)) : \ \theta\in\mathbb{T}^n\},$$

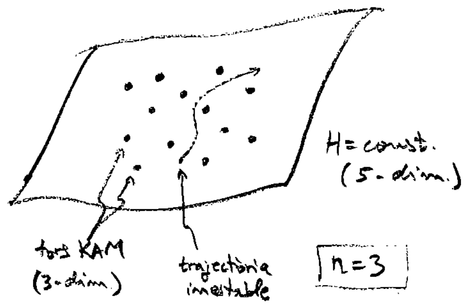
tindrem

$$\sup_{\theta\in\mathbb{T}^n} |A_I^\varepsilon(\theta)-\theta| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0, \qquad \sup_{\theta\in\mathbb{T}^n} |B_I^\varepsilon(\theta)-I| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{(deformació)},$$

i en les coordenades θ que parametritzen el tor $\mathcal{T}_I^\varepsilon$, el flux és lineal: $\dot\theta=$ const.

- Quan es pot aplicar el teorema KAM tenim doncs estabilitat perpètua d'un gran nombre de trajectòries (són fitades), però això no impedeix que puguin existir zones de comportament caòtic i fins i tot, si $n\geq 3$, d'inestabilitat (coneguda com a difusió d'Arnold).

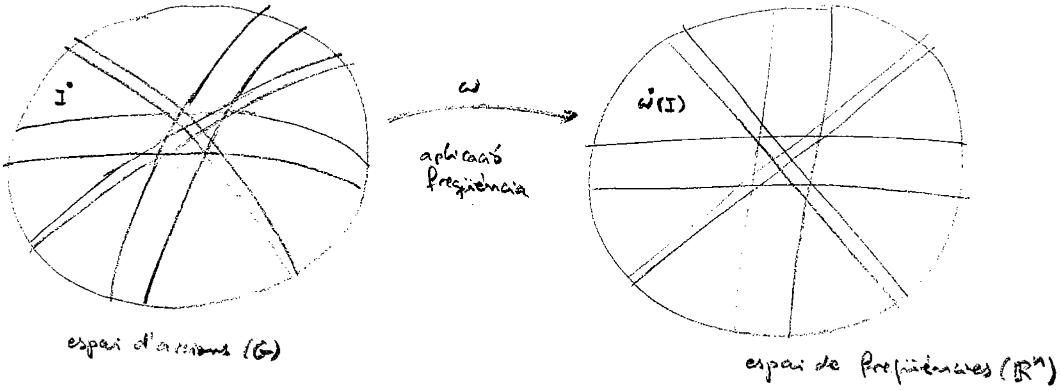




- Els tors que es conserven són els que tenen freqüències $\omega(I)$ suficientment no ressonants, per a les quals la influència dels petits divisors $k\cdot\omega(I)$ pot ser **superada**. Concretament, cal considerar les freqüències que satisfan una condició diofàntica: per a certes constants τ, γ,

$$|k\cdot\omega(I)| \geq \frac{\gamma}{|k|^{\tau}} \qquad \forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}, \tag{1}$$

essent $|k| = \sum_{j=1}^{n} |k_j|$.



Es pot veure que el conjunt de vectors satisfent la condició diofàntica (1) per a $\tau > n-1$ i $\gamma > 0$ donats omple un conjunt de mesura $1 - O(\gamma)$ a $\mathbb{R}^n$ (i el conjunt dels que ho satisfan per a $\tau > n-1$ fixada i $\gamma > 0$ qualsevol és dens a $\mathbb{R}^n$). Es tracta d'un conjunt de tipus "cantorià", que no conté cap conjunt obert tot i que la seva mesura és gran.

- El teorema KAM fou "descobert" el 1954 per Kolmogorov; de fet aquesta primera versió comporta la conservació d'un tor fixat, amb freqüències adequades, per a hamiltonians analítics (vegeu [Kolmogorov78]; també a [BenettinGGS84] es pot trobar una prova elemental del teorema seguint les idees originals de Kolmogorov).

Una versió més global del teorema estableix l'existència d'una extensa família de tors invariants i dóna una fita de la mesura del complementari del conjunt invariant, també per a hamiltonians analítics (vegeu [Arnold63] i sobretot [Pöschel82]).

Per la seva banda, el teorema del twist és un resultat anàleg al teorema KAM sobre corbes invariants d'aplicacions del pla que preserven àrea, en el cas diferenciable o $\mathcal{C}^r$ (vegeu [Moser62], [Rüssmann76]).

Com a referència general sobre teoria KAM, podeu consultar [Llave01]

- Condicions de no degeneració.

Habitualment hom imposa dos tipus de condicions de no degeneració sobre l'aplicació freqüència $\omega : I \longmapsto \omega(I) = \nabla h(I)$, per al teorema KAM: la no degeneració "ordinària" o de Kolmogorov:

$$\det \frac{\partial \omega}{\partial I}(I) \neq 0 \qquad \forall I \in G,$$

i la no degeneració isoenergètica o d'Arnold:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial I}(I) & \omega(I) \\ \omega(I)^T & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \forall I \in G.$$

Les dues condicions són independents, com ho mostren els exemples

$$h(I_1, I_2) = \ln \frac{I_2}{I_1}, \qquad h(I_1, I_2) = \frac{1}{2} I_1^2 + I_2.$$

La no degeneració ordinària ens diu que l'aplicació $I \longmapsto \omega(I)$ és un difeomorfisme local i per tant els tors no pertorbats $\mathcal{T}_I^0$ poden ser parametritzats (localment) per llurs freqüències associades $\omega_1, \dots, \omega_n$.

En canvi, la no degeneració isoenergètica equival a demanar (suposant per exemple que $\omega_n(I) \neq 0$ sobre G) que l'aplicació

$$I \longmapsto \left(\frac{\omega_1(I)}{\omega_n(I)}, \dots, \frac{\omega_{n-1}(I)}{\omega_n(I)}, h(I) \right)$$

és un difeomorfisme local. En aquest cas, sobre cada nivell d'energia $h(I) = e$ els tors no pertorbats $\mathcal{T}_I^0$ es parametritzen per llurs raons entre freqüències $\frac{\omega_1}{\omega_n}, \dots, \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$.

Donada una condició diofàntica, amb aquestes condicions de no degeneració assegurem que les freqüències de la majoria de tors no pertorbats satisfan la condició diofàntica (o la majoria sobre cada nivell d'energia en el cas isoenergètic).

- Esmentem de passada que una altra condició suficient per a l'existència de tors invariants del hamiltonià pertorbat, molt més general que les dues que hem tractat aquí, ha estat introduïda a [Rüssmann90], i demana que $\omega(G)$ no estigui contingut en cap hiperplà que passi per l'origen. Aquesta altra condició també és, en cert sentit, "necessària" (vegeu [Sevryuk95]).

- En línies generals, la versió ordinària del teorema KAM estableix:

> Sigui $H(\phi,I)=h(I)+f(\phi,I)$ hamiltonià analític en (un entorn complex de) $\mathbb{T}^n\times G$, amb $f=O(\varepsilon)$, tal que l'aplicació freqüència $\omega=\nabla h$ satisfà la condició de no degeneració ordinària.
>
> Siguin $\tau>n-1$, $\gamma>0$ fixats. Existeix $\varepsilon_0=O(\gamma^2)$ tal que, si $\varepsilon\le\varepsilon_0$, aleshores per a cada tor invariant n-dimensional $\mathcal{T}_I^0=\mathbb{T}^n\times\{I\}$ del hamiltonià no pertorbat h, tal que $\omega(I)$ satisfà la condició diofàntica
>
> $$|k\cdot\omega(I)|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau}\qquad\forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\},$$
>
> existeix un tor invariant $\mathcal{T}_I^\varepsilon$ del hamiltonià pertorbat H, amb el mateix vector de freqüències $\omega(I)$, i la màxima distància (deformació) del tor pertorbat $\mathcal{T}_I^\varepsilon$ respecte del no pertorbat $\mathcal{T}_I^0$ és $O(\varepsilon/\gamma)$. A més, la mesura del complementari a $\mathbb{T}^n\times G$ del conjunt format pels tors $\mathcal{T}_I^\varepsilon$ és $O(\gamma)$.

L'enunciat és similar per a la versió isoenergètica, amb la diferència que el tor pertorbat $\mathcal{T}_I^\varepsilon$ no tindrà en general vector de freqüències $\omega(I)$, sinó un vector de freqüències paral·lel a $\omega(I)$ i energia $h(I)$.

- Fixat ε, per tal de tenir el màxim nombre possible de tors KAM és possible agafar $\gamma=O(\sqrt{\varepsilon})$. Llavors tant la deformació dels tors KAM respecte dels no pertorbats com la mesura del complementari són $O(\sqrt{\varepsilon})$ (vegeu [Pöschel82], [Neishtadt82])

Aquesta idea també ens diu que, si fem créixer ε, només sobreviuran els tors amb un vector de freqüències que tingui γ prou gran. D'aquesta manera, per a $n=2$ g.d.l., podríem esperar que els "darrers" tors a desaparèixer serien els que tinguessin com a quocient $\omega_2(I)/\omega_1(I)$ un irracional noble.

- En general podem dir que la versió isoenergètica del teorema KAM és més significativa des del punt de vista de l'estabilitat, ja que assegura l'existència d'un gran nombre de tors KAM sobre cada nivell d'energia fixat. Per a $n=2$, se'n dedueix l'estabilitat del sistema pertorbat (en el sentit de trajectòries fitades), ja que els tors KAM separen sempre el nivell d'energia sobre el qual es troben. En el cas d'un entorn d'un punt d'equilibri el·líptic, deduiríem l'estabilitat de Lyapunov del punt d'equilibri.

  En canvi, per a $n\ge3$, no podem garantir estabilitat però sembla que en el cas isoenergètic els tors KAM han de constituir barreres més fortes a la inestabilitat.

- Les zones on cal esperar que hi hagi trajectòries inestables o difusió d'Arnold són les properes a ressonàncies. Un mecanisme per a la difusió, al llarg d'una ressonància simple, fou descrit el 1964 per Arnold mitjançant un exemple amb $2+1/2$ g.d.l. (no autònom) que ha esdevingut famós (vegeu [Arnold64], i també [ArnoldA]). Aquest mecanisme no tenia en compte els "gaps" formats per ressonàncies dobles, per a les quals recentment s'han començat a descriure mecanismes de difusió (vegeu [DelshamsLS06]).

En el cas $n=2$, la no degeneració ordinària no assegura l'estabilitat del sistema, com podem veure en el següent exemple de Nekhoroshev (vegeu [Arnold – Kozlov – Neishtadt, p. 280]):

$$H = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - I_2^2\right) + \varepsilon \sin(\phi_1 - \phi_2),$$

que té la solució "ràpida"

$$I_1 = -\varepsilon t, \quad I_2 = \varepsilon t, \quad \phi_1 = \phi_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

(aquí el problema és que l'aplicació freqüència $\omega(I_1, I_2) = (I_1, -I_2)$ no és isoenergèticament no degenerada sobre la recta $I_1 = -I_2$, que és continguda precisament en un nivell d'energia de $h(I) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2)$).

- Comentaris sobre la prova del teorema KAM ($\simeq$ versió [Arnold63])

Partim de $H^{(0)} = h^{(0)}(I) + R^{(0)}(\phi, I)$, amb $h^{(0)} = h$, $R^{(0)} = f$.
Fent successives transformacions **simplèctiques** $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(s)}$, obtenim $H^{(s)} = h^{(s)}(I) + R^{(s)}(\phi, I)$, i volem que $R^{(s)} \longrightarrow 0$ per a $s \to \infty$; d'aquesta manera al final del procés obtindrem un hamiltonià integrable $H^{(\infty)} = h^{(\infty)}(I)$, i totes les trajectòries es trobaran sobre tors invariants.

Si la transformació $\Phi^{(s)}$ ve generada per un hamiltonià $W^{(s)}(\phi, I)$, tenim

$$H^{(s)} = H^{(s-1)} \circ \Phi^{(s)} = h^{(s-1)} + \{h^{(s-1)}, W^{(s)}\} + R^{(s-1)} + \left[\begin{array}{c}\text{termes d'ordre} \geq 2 \\ \text{en } W^{(s)}, R^{(s+1)}\end{array}\right].$$

A partir d'una successió $K_s \to \infty$, d'ordres de tall, prenem $W^{(s)}$ i $\Gamma^{(s)}$ com a sèries de Fourier finites en ϕ (harmònics $|k| \leq K_s$), resolent l'eq. homològica $\{W^{(s)}, h^{(s-1)}\} + \Gamma^{(s)} = R^{(s-1)}_{\leq K_s}$, respecte el mòdul $M=0$, i obtenim:

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma^{(s)}(I) = \overline{R^{(s-1)}}(I) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} R^{(s-1)}(\phi, I)\, d\phi \quad \text{(forma normal)} \\[2ex] W^{(s)}(\phi, I) \text{ solució de} \\[1ex] \qquad \omega^{(s-1)}(I) \cdot \dfrac{\partial W^{(s)}}{\partial \phi} = R^{(s-1)} - \overline{R}^{(s-1)} \end{array} \right.$$

i prenem

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{(s)} = h^{(s-1)} + \Gamma^{(s)} \\ R^{(s)} = R^{(s-1)}_{>K_s} + [\text{termes d'ordre} \geq 2] \end{array} \right.$$

Així anem modificant la part integrable, en afegir-hi a cada pas la forma normal obtinguda. D'aquesta manera aconseguim tenir un procés quadràtic (a l'estil del mètode de Newton), amb el qual es pot anul·lar la influència dels petits divisors i tenir convergència.
Amb tot, només hi ha convergència quan les freqüències són diofàntiques, i al final el domini queda reduït a un conjunt cantorià.

- Aplicació de Poincaré reduïda sobre un nivell d'energia.

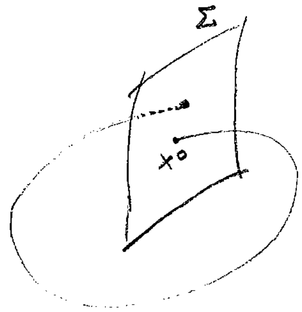
$H: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ hamiltonià, $\phi(t,x)$ el flux associat.

Sigui $\Sigma \subset \mathcal{U}$ hipersuperfície (codimensió 1).

Siguin $x^0 \in \Sigma$, z_0 tal que $\phi(z_0, x^0) \in \Sigma$,

i suposem que Σ és una secció transversal al camp X_H en x^0,

és a dir, $X_H(x^0) \notin T_{x^0}\Sigma$.



Si Σ ve definida per l'equació $g(x)=0$, la condició de transversalitat s'expressa com

$$\nabla g(x^0) \cdot X_H(x^0) \neq 0. \qquad (1)$$

Per a x proper a x^0, definim $z(x)$ demanant $\phi(z(x),x) \in \Sigma$, és a dir, aïllant $t = z(x)$ de l'equació $g(\phi(t,x)) = 0$ (això es pot fer per la condició de transversalitat, i tenim $z(x^0) = z_0$).

Aleshores l'aplicació $A: \Sigma \longrightarrow \Sigma$ definida per $A(x) = \phi(z(x), x)$ rep el nom d'aplicació de Poincaré del camp X_H sobre la secció Σ.

Tenint en compte que el hamiltonià H és integral primera, anomenem $e = H(x^0)$ i definim $\Sigma_e = \Sigma \cap H^{-1}(e)$.

Notem que Σ_e ve definida per les equacions $g(x)=0$, $H(x)=e$, i la condició (1) implica que $\nabla g(x^0)$, $\nabla H(x^0)$ no són colineals. Per tant, Σ_e és (localment) una varietat de codimensió 2 en $\mathbb{R}^{2n}$.

Per conservació de H, tenim $A: \Sigma_e \longrightarrow \Sigma_e$, i s'anomena aplicació de Poincaré reduïda.

Recordem que la forma simplèctica standard sobre $\mathbb{R}^{2n}$ ve donada per $\omega^0(x)(u,v) = u^T J v$.

Suposarem que la seva restricció a Σ_e és no degenerada, és a dir,

$$\forall x \in \Sigma_e, \ \forall u \in T_x\Sigma_e, \quad \exists v \in T_x \Sigma_e : \ \omega(x)(u,v) \neq 0.$$

Llavors podem dir que Σ_e és una subvarietat simplèctica de codimensió 2 de $\mathbb{R}^{2n}$.

Es pot provar que l'aplicació de Poincaré reduïda $A: \Sigma_e \longrightarrow \Sigma_e$ és simplèctica.

- <u>Tors invariants d'aplicacions simplèctiques</u>.

Comentem la relació entre el teorema KAM per a hamiltonians amb n graus de llibertat i la seva versió per a aplicacions canòniques amb $n-1$ graus de llibertat, a través d'una aplicació de Poincaré.

Considerem variables angle-acció $(\phi, I) \in \mathbb{T}^n \times G$, $G \subset \mathbb{R}^n$, i un hamiltonià integrable $H_0(\phi, I) = h(I)$. Considerem les freqüències $\omega(I) = \nabla h(I)$.

Sigui $I^* \in G$ amb $\omega_n(I^*) \neq 0$. Sigui $e = h(I^*)$, i considerem la secció de Poincaré reduïda $\Sigma_e^0 = \{ (\phi, I) \mid \phi_n = 0,\ h(I) = e \}$,

la qual és transversal al camp hamiltonià en qualsevol punt (ϕ, I^*), $\phi \in \mathbb{T}^n$. Es comprova fàcilment que la forma simplèctica standard restringida a Σ_e^0 és no degenerada.

Notació: $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ per a qualsevol vector $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$.

Podem parametritzar Σ_e^0 per $(\bar{\phi}, \bar{I})$, ja que $\phi_n = 0$ i $I_n = g(\bar{I})$ es pot aïllar de $h(\bar{I}, I_n) = e$ prop de I^*.

L'aplicació de Poincaré reduïda del hamiltonià $h(I)$ sobre Σ_e^0 ve donada per:

$$A_0(\bar{\phi}, \bar{I}) = (\bar{\phi} + \Omega(\bar{I}), \bar{I}),$$

essent $\Omega(\bar{I}) = 2\pi \cdot \dfrac{\bar{\omega}(\bar{I}, g(\bar{I}))}{\omega_n(\bar{I}, g(\bar{I}))}$.

Resulta que A_0 és una aplicació simplèctica <u>integrable</u>: tots els tors $(n-1)$-dimensionals $\bar{I} = \text{const.}$ són invariants. Aquests tors corresponen a tors n-dimensionals del hamiltonià $h(I)$.

Es pot comprovar que

$$\det \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{I}}(\bar{I}) \neq 0 \quad \forall \bar{I} \iff \omega(I) \text{ satisfà la condició de no degeneració } \underline{\text{isoenergètica}}.$$

Si ara tenim un hamiltonià quasi-integrable $H_\varepsilon(\phi, I) = h(I) + f_\varepsilon(\phi, I)$, amb $f_\varepsilon = O(\varepsilon)$, considerem la secció $\Sigma_e^\varepsilon = \{ (\phi, I) \mid \phi_n = 0,\ H_\varepsilon(\phi, I) = e \}$. Seguirem tenint transversalitat al camp hamiltonià si ε és prou petita. L'aplicació de Poincaré sobre Σ_e^ε és, en les coordenades $(\bar{\phi}, \bar{I})$, una pertorbació de A_0:

$$A_\varepsilon(\bar{\phi}, \bar{I}) = (\bar{\phi} + \Omega(\bar{I}) + F_\varepsilon(\bar{\phi}, \bar{I}),\ \bar{I} + G_\varepsilon(\bar{\phi}, \bar{I})).$$

- <u>Teorema del twist</u> (o de les corbes invariants)

Existeixen formulacions del teorema KAM per a aplicacions simplèctiques, pertorbació d'una aplicació canònica integrable (vegeu per exemple [Douady 82]).

El cas més simple i conegut (però no trivial) és el de les <u>aplicacions preservant àrea</u>, i llavors el resultat rep el nom de teorema del twist.

Considerem en el pla una aplicació $A_0 : (\phi, I) \longmapsto (\phi', I') = (\phi + \Omega(I), I)$, definida sobre $\mathbb{T} \times [a,b]$, essent $[a,b] \subset \mathbb{R}$ interval.

Aquesta aplicació A_0 deixa tots els cercles $I = \text{const.}$ invariants, i sobre cadascun d'ells A_0 és una rotació (o translació) d'angle $\Omega(I)$.

Els cercles amb $\Omega(I) = 2\pi \frac{p}{q}$ (p, q relativament primers) estan formats per punts q-periòdics de A_0 (fixos per A_0^q).

En canvi, els cercles amb $\Omega(I)/2\pi$ irracional no tenen punts periòdics, i l'òrbita de cada punt omple densament tot el cercle.

Suposarem $\frac{d\Omega}{dI}(I) \neq 0 \quad \forall I \in [a,b]$ (<u>condició de twist</u>).

Considerem ara una pertorbació de l'aplicació A_0:

$$A_\varepsilon : (\phi, I) \longmapsto (\phi', I') = \big(\phi + \Omega(I) + \varepsilon \cdot F(\phi, I, \varepsilon),\ I + \varepsilon \cdot G(\phi, I, \varepsilon)\big),$$

i suposem que té la <u>propietat d'intersecció</u>: tota corba $\Gamma = \{I = g(\phi)\}$, amb g 2π-periòdica, interseca la seva imatge: $A_\varepsilon(\Gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset$. (per exemple si A_ε preserva àrea i, a més, $A_\varepsilon(\mathbb{T} \times [a,b]) \subset \mathbb{T} \times [a,b]$).

<u>Teorema</u>. Suposarem A_ε analítica sobre $\mathbb{T} \times [a,b]$, amb $\frac{d\Omega}{dI}(I) > 0$, i que es satisfà la propietat d'intersecció. Donat $\lambda \in (\Omega(a), \Omega(b))$ tal que

$$\left| \frac{\lambda}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\gamma}{q^{\tau+1}}, \quad \forall p, q \text{ enters}, q > 0, \text{ essent } \tau \geq 1,$$

existeix ε_0 tal que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'aplicació A_ε té una corba invariant analítica del tipus $(\xi + u(\xi), v(\xi))$, $\xi \in \mathbb{T}$, tal que la restricció de A_ε a aquesta corba ve donada per $\xi \longmapsto \xi + \lambda$.

Aquest teorema fou provat per primer cop en el cas (suficientment) diferenciable, usant tècniques de "smoothing" (vegeu [Moser 62]). Es pot trobar a [Siegel-Moser, § 32–33] una adaptació de la prova al cas analític (vegeu també [Rüssmann 76]).