SISTEMES HAMILTONIANS: PROPIETATS BÀSIQUES I EXEMPLES.

Estudiarem els sistemes hamiltonians des d'un punt de vista de sistemes dinàmics.

- Un <u>sistema hamiltonià</u> amb n <u>graus de llibertat</u> és un sistema de $2n$ EDOs de la forma

$$\left\{ \begin{aligned} \dot q_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p) \\ \dot p_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q,p), \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

que ve donat per un <u>hamiltonià</u> o funció hamiltoniana $H : \underset{\text{obert}}{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}} \longrightarrow \mathbb{R}$, almenys de classe C^2.

Les solucions són corbes $(q(t), p(t))$ contingudes en $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ (<u>espai de fases</u>)

- Exemple clàssic: <u>sistema conservatiu</u> o newtonià

La trajectòria a $\mathbb{R}^n$ d'una partícula sotmesa a un <u>potencial</u> $V(q) = V(q_1, \dots, q_n)$ ve donada per la 2ª llei de Newton:

$$m\ddot q = \underbrace{-\nabla V(q)}_{\text{força}}, \quad \text{sistema de } n \text{ EDOs de } 2^{\text{on}} \text{ ordre.}$$

Escrivint $p = m\dot q$, el sistema equival a $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$, essent $H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$ (energia total).

Notem que $q = (q_1, \dots, q_n)$ és la posició, i $p = (p_1, \dots, p_n)$ és el moment lineal. Els sistemes conservatius tenen moltes propietats especials, i el formalisme hamiltonià és l'estructura natural on desenvolupar la teoria d'aquests sistemes.

- Els sistemes hamiltonians que hem definit són els autònoms.

Més en general podem considerar el cas <u>no autònom</u>:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \qquad (2)$$

amb $H : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. En aquest cas es diu que el nombre de graus de llibertat és $n + 1/2$.

De fet, el sistema és equivalent al d'un hamiltonià autònom amb $n+1$ graus de llibertat (problema 1.1).

- Notació més compacta per al sistema (2):

$$\dot{x} = X_H(x,t) = J\cdot \nabla H(x,t), \qquad x=(q,p)$$

essent $\nabla H(x,t) = \nabla_x H(x,t) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t), \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t)\right)$

$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ matriu $2n\times 2n$ (més endavant veurem que és la matriu de la forma simplèctica)

En el cas autònom, tenim un camp vectorial:

$$X_H(x) = J\,\nabla H(x)$$ <u>camp hamiltonià</u> associat a H.

- <u>Parèntesi de Poisson</u>. Permet formular moltes propietats dels sistemes hamiltonians. Donades $F(x,t)$, $G(x,t)$, definim el seu parèntesi de Poisson com la funció

$$\{F,G\}(x,t) = \nabla F(x,t)^T\cdot J\cdot \nabla G(x,t) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)$$

<u>Propietats</u>:
- antisimètric: $\{F,G\} = -\{G,F\}$ (i per tant $\{F,F\}=0$)
- bilineal
- identitat de Jacobi: $\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = 0$.
- regla de Leibniz: $\{F\cdot G,H\} = F\{G,H\} + G\{F,H\}$
- no degeneració: si $\nabla F(x,t)\neq 0 \Rightarrow \exists G: \{F,G\}(x,t)\neq 0$.

- Estudiem com evoluciona una funció $F(x,t)$ sobre una trajectòria $x(t)$ del sistema hamiltonià (2):

$$\frac{d}{dt}F(x(t),t) = D_xF(x(t),t)\,\dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x(t),t) = \nabla F(x(t),t)^T\cdot X_H(x(t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x(t),t) =$$

$$= \{F,H\}(x(t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x(t),t),$$ és a dir $\boxed{\dot{F} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}}$

- En el cas autònom (1), donada $F(x)$ es compleix que $\dot{F} = \{F,H\}$

Així, F és <u>integral primera</u> $\Longleftrightarrow$ $\{F,H\}\equiv 0$.

Notem que la pròpia $H(x)$ és sempre integral primera: $\dot{H}\equiv 0$ (<u>conservació de l'energia</u>).

En canvi, en el cas no autònom resulta $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}\neq 0$.

D'altra banda, la identitat de Jacobi ens diu que si F, G són integrals primeres, llavors $\{F,G\}$ també és i.p. (pot ser útil per trobar noves i.p.)

També, la regla de Leibniz ens ve a dir que $\dot{\overline{FG}} = F\dot{G} + \dot{F}G$.

- **Aplicacions canòniques o simplèctiques**

Estudiem quins canvis de variable conserven l'estructura de les equacions hamiltonianes.

Fent un canvi $x=\varphi(y)$, el sistema $\dot{x}=X_H(x)$ es transforma en $\dot{y}=(\varphi^* X_H)(y)=D\varphi(y)^{-1}X_H(\varphi(y))$ (pull-back del camp vectorial)

Tindrem $\varphi^* X_H = X_{H\circ\varphi} \iff D\varphi(y)^{-1}\cdot J\,\nabla H(\varphi(y)) = J\cdot \underbrace{\nabla(H\circ\varphi)(y)}_{= D\varphi(y)^T\cdot\nabla H(\varphi(y))} \quad \forall y,$

i això es complirà si $D\varphi(y)^{-1}J = J\,D\varphi(y)^T$, és a dir $D\varphi(y)^T\cdot J\cdot D\varphi(y)=J$ (prenent inverses i usant $J^{-1}=-J$).

Def. Una aplicació $\varphi: V\subset\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^{2n}$ de classe C^1, és canònica o simplèctica si $D\varphi(y)^T J\,D\varphi(y) = J \quad \forall y\in V$.

Observem que, per a $n=1$ (1 g.d.l.), les aplicacions simplèctiques són les aplicacions preservant àrea (i orientació): φ simplèctica $\iff \det D\varphi(y)=1 \quad \forall y$.

És fàcil comprovar que un canvi simplèctic $x=\varphi(y)$ també conserva l'estructura d'un sistema hamiltonià no autònom: $\dot{x}=X_H(x,t)$ es transforma en $\dot{y}=X_{\hat{H}}(y,t)$, amb $\hat{H}(y,t)=H(\varphi(y),t)$.
Hi ha altres caracteritzacions de les aplicacions simplèctiques; vegeu els problemes 1.2 i 1.3.
Per al cas d'un canvi $x=\varphi(y,t)$, vegeu el problema 1.5.

- **Flux hamiltonià.**

Donat el sistema $\dot{x}=X_H(x,t)$, el seu flux $\varphi_{t_0,t}(x)=\varphi(t_0,t,x)$ ve definit perquè $\varphi(t_0,\cdot,x)$ és la solució que compleix la condició inicial $\varphi(t_0,t_0,x)=x$. Si H és C^r, $r\geq 2$, llavors X_H és C^{r-1} i φ també és C^{r-1}.

Podem escriure:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi_{t_0,t}(x) = X_H(\varphi_{t_0,t}(x),t) \\ \varphi_{t_0,t_0}(x)=x \end{cases} \quad \text{o més breument} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_{t_0,t} = X_H\circ\varphi_{t_0,t} \\ \varphi_{t_0,t_0}=id \end{cases}$$

(Notació: $\frac{d}{dt}\varphi_{t_0,t}(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0,t,x)$).

Nota: En el cas autònom es compleix que $\varphi_{t_0,t}=\varphi_{0,t-t_0}$ i per tant podem considerar sempre $t_0=0$. S'escriu simplement $\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$ i tenim $\dot{\varphi}_t = X_H\circ\varphi_t$, $\varphi_0=id$.

La noció de flux és general per a sistemes d'EDOs, però en el cas d'un sistema hamiltonià provem que $\varphi_{t_0,t}$ és una aplicació simplèctica en el seu domini, $\forall\, t_0, t$.

Derivant (3) respecte x i escrivint $D = D_x$, tenim:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} D\varphi_{t_0,t}(x) = DX_H(\varphi_{t_0,t}(x), t)\cdot D\varphi_{t_0,t}(x) \\ D\varphi_{t_0,t_0}(x) = I \end{cases}$$

[Nota: hem usat $\frac{d}{dt} D_x \varphi_{t_0,t}(x) = D_x \frac{d}{dt}\varphi_{t_0,t}(x)$ i això requeriria que φ fos C^2 i per tant que H fos C^3, però es poden justificar les equacions (4) també en el cas que φ és C^1; vegeu [Arnold-EDOs, §32].]

Volem veure que $U(t) = D\varphi_{t_0,t}(x)^T J\, D\varphi_{t_0,t}(x) = J \quad \forall t$.

Clarament tenim $U(t_0) = J$, i calculem:

$$\dot U(t) = \left(DX_H(\varphi_{t_0,t}(x),t)\cdot D\varphi_{t_0,t}(x)\right)^T J\, D\varphi_{t_0,t}(x) + D\varphi_{t_0,t}(x)^T J\cdot DX_H(\varphi_{t_0,t}(x),t)\, D\varphi_{t_0,t}(x) =$$

$$= D\varphi_{t_0,t}(x)^T \cdot \Big(\underbrace{DX_H(\varphi_{t_0,t}(x),t)^T J + J\, DX_H(\varphi_{t_0,t}(x),t)}_{=\,0}\Big)\cdot D\varphi_{t_0,t}(x) = 0 \quad \forall t$$

$\Longleftarrow$ usant que $DX_H(x,t) = J\cdot D^2H(x,t)$.

Per tant, $U(t) = J \quad \forall t$ i $\varphi_{t_0,t}$ és simplèctica.

Les equacions (4) són un sistema d'EDOs lineals (amb coeficients variables) anomenades equacions variacionals de 1er ordre. S'utilitzen sovint per estudiar el comportament de solucions properes a una solució coneguda.

De la definició d'aplicació simplèctica, usant que $\det J = 1$, deduïm que $\det D\varphi_{t_0,t}(x) = \pm 1$. Com que $D\varphi_{t_0,t_0}(x) = I$, per continuïtat resulta que $\det D\varphi_{t_0,t}(x) = 1$. Així doncs, el flux $\varphi_{t_0,t}$ conserva volum i orientació.

Observem que això també podia haver estat deduït aplicant la fórmula de Liouville a les equacions (4):

$$\det D\varphi_{t_0,t}(x) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} DX_H(\varphi_{t_0,s}(x),s)\,ds} = 1,$$

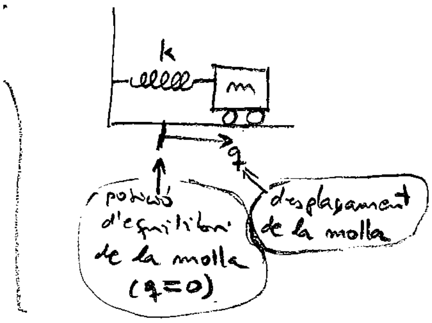
ja que $\operatorname{tr} DX_H(x,t) = \operatorname{tr}(J\cdot D^2H(x,t)) = 0$

(En el cas autònom, estem dient que el camp hamiltonià té divergència nul·la: $\operatorname{div} X_H(x) = \operatorname{tr} DX_H(x) = 0$, i per tant conserva volum.

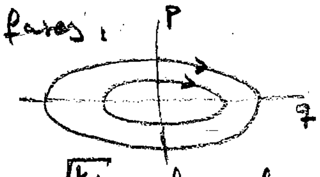
Alguns exemples de sistemes hamiltonians.

1) Oscil·lador harmònic (1 grau de llibertat)

Considerem un sistema massa-molla on la força recuperadora és lineal: $f(q) = -kq$.
És un sistema conservatiu amb potencial $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$.
L'EDO és $m\ddot{q} = -kq$, és a dir $\dot{q} = p/m$, $\dot{p} = -kq$,
que correspon al hamiltonià $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$.



Retrat de fases:

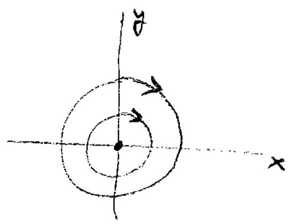


Les trajectòries recorren el·lipses (les corbes de nivell $H=h$).

Si definim $\omega = \sqrt{k/m}$ i fem el canvi (simplèctic) $q = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}x$, $p = \sqrt{m\omega}\, y$,
obtenim el hamiltonià $\tilde{H}(x,y) = \frac{\omega}{2}(x^2+y^2)$, és a dir $\dot{x} = \omega y$, $\dot{y} = -\omega x$

$$(\ddot{x} + \omega^2 x = 0)$$

⤳ Retrat de fases:



Les trajectòries recorren circumferències $x^2+y^2 = r^2$, amb velocitat angular ω.
Període: $\frac{2\pi}{\omega}$.

2) Oscil·lador no lineal

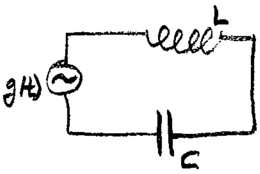
$$\boxed{\ddot{q} = f(q) + g(t)} \quad \begin{cases} \text{lliure si } g(t)\equiv 0 \to \text{autònom} \\ \text{forçat si } g(t)\not\equiv 0 \to \text{no autònom} \end{cases}$$

Possibles models físics:

- Molla no lineal (sistema mecànic), amb força recuperadora $f(q)$, sotmesa a una força externa $g(t)$ (suposant $\underline{m=1}$ o havent fet algun canvi).

  (Suposem que no hi ha fregament, que donaria termes depenents de $\dot{q}$, p.ex. $\ddot{q} = f(q) - a\dot{q} + g(t)$ ⤳ no conservatiu.

- Circuit LC (sistema elèctric), format per una inductància L (lineal), un condensador C (no lineal) i una força electromotriu $g(t)$.



$$\left.\begin{array}{l} q(t):\text{ càrrega del condensador} \\ I(t) = \dot{q}(t) \text{ intensitat de corrent} \end{array}\right\} \quad L\dot{I} + \frac{q}{C} = g(t)$$

(Més en general tenim els circuits LRC, amb una resistència R, però llavors és no conservatiu: $L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = g(t)$)

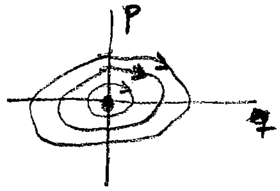
L'equació es pot escriure com el sistema

$$\dot{q} = p = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = f(q) + g(t) = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

amb el hamiltonià $H(q,p,t) = \frac{p^2}{2} + V(q) - q\,g(t)$, $\quad V(q) = -\int_0^q f(u)\,du$

En el <u>cas autònom</u> ($g(t) \equiv 0$), H és integral primera i el retrat de fases ve donat per les corbes de nivell de H.

Suposarem que $f(0) = 0$, $f'(0) = -\omega^2 < 0$ (el comportament de l'oscil·lador prop del punt d'equilibri s'aproxima pel de l'oscil·lador harmònic), llavors les corbes de nivell de H prop del $(0,0)$ són del tipus:



Notem que el potencial $V(q)$ té un mínim en el 0:

$$V(q) = \frac{\omega^2}{2} q^2 + O(q^3).$$

Podríem trobar la solució "per quadratures": sobre el nivell d'energia $H(q,p) = h$, tenim

$$\frac{dq}{dt} = p = \pm\sqrt{2\,(h - V(q))}.$$

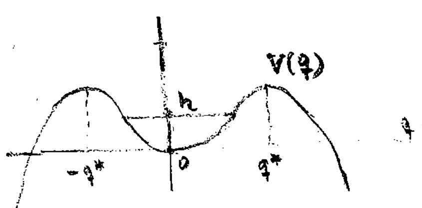
Resolent aquesta EDO separable, si $q(0) = q_0$, per obtenir la solució $q(t)$ hauríem d'aïllar-la de

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{du}{\pm\sqrt{2\,(h - V(u))}}. \qquad (*)$$

El signe $\pm$ depèn de si $p_0 > 0$ o $p_0 < 0$. Notem però que es compleix la següent simetria: $(q(t), p(t))$ solució $\Rightarrow$ $(q(-t), -p(-t))$ solució (el sistema és "<u>reversible</u>" respecte l'eix q).

Les funcions definides per integrals de la forma $(*)$ han estat força estudiades. Així tenim les <u>funcions el·líptiques de Jacobi</u> que corresponen a diferents casos on $f(q) = -V'(q)$ és un polinomi de grau 2 o 3.

Per exemple, considerant $f(q) = -(1+k^2)\,q + 2k^2 q^3$ on $0 < k < 1$, es defineix la funció sinus el·líptic $\mathrm{sn}(t,k)$ com la solució $q(t)$ que compleix la condició inicial $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 1$. Aquesta funció compleix propietats força semblants a la funció $\sin t$ que tindríem en el cas $k = 0$. (problema <u>1.9</u>)



$$V(q) = \frac{1+k^2}{2} q^2 - \frac{k^2}{2} q^4$$

$\rightarrow$ mínim en $q = 0$, màxims en $\pm q^* = \pm \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2}\,k}$

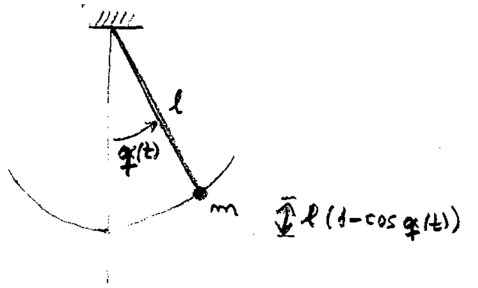
$$V(0) = 0, \quad V(\pm q^*) = \frac{(1+k^2)^2}{8k^2}$$

$$h = H(0,1) = \tfrac{1}{2}$$

En el <u>cas no autònom</u> ($g(t) \not\equiv 0$), H no és integral primera, i en general el sistema (de $1 + 1/2$ g.d.l.) és no integrable.

3) Pèndol

És un cas particular d'oscil·lador no lineal.



$\varphi(t)$: angle respecte la posició vertical.

2ª llei de Newton:

$$\underbrace{m\ell\ddot{\varphi}}_{\text{acceleració}} = \underbrace{-mg\sin\varphi}_{\text{part tangencial del pes}} \quad (\text{sense fregament})$$

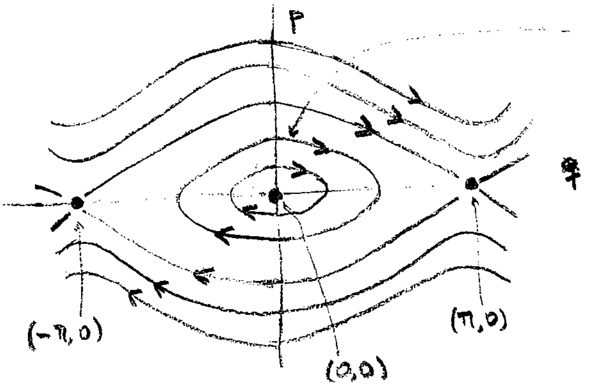
Tenim l'EDO $\boxed{\ddot{\varphi} + b\sin\varphi = 0}$ amb $b = \frac{g}{\ell} > 0$, que correspon al hamiltonià $\boxed{H(q,p) = \frac{p^2}{2} + b\,(1-\cos q) = \frac{p^2}{2} + 2b\sin^2\frac{q}{2}}$

Suposarem $\underline{b=1}$ (ho podem aconseguir fent el canvi $q = u$, $p = \sqrt{b}\,v$, i un canvi de temps $t = \tau/\sqrt{b}$)

Els punts d'equilibri venen donats pels extrems relatius del potencial $V(q) = 1-\cos q$:

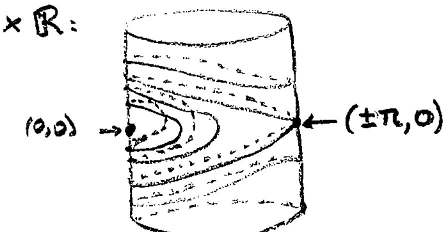
$$\begin{cases} q = 0 \ \text{mínim} \longrightarrow (0,0) \ \text{punt d'eq. estable (el·líptic)} \\ q = \pm\pi \ \text{màxim} \longrightarrow (\pm\pi, 0) \ \text{punt d'eq. inestable (hiperbòlic)} \end{cases}$$

Les òrbites corresponen a corbes de nivell $H(q,p) = h$



$$\begin{cases} 0<h<2 : \text{ òrbites de libració (periòdiques)} \\ h>2 : \text{ òrbites de circulació (")}. \end{cases}$$

Com que la variable q és 2π-periòdica, podem veure l'espai de fases com un cilindre $S^1 \times \mathbb{R}$:



Els dos tipus d'òrbites (libració i circulació) venen separats pel nivell d'energia $h=2$, en el qual tenim les separatrius o òrbites homoclíniques, asimptòtiques per a $t \to \pm\infty$ al punt hiperbòlic (són les úniques òrbites no periòdiques). Les podem trobar fàcilment: posant $x(0)=0$,

$$t = \int_0^q \frac{du}{\pm\sqrt{2(1+\cos u)}} = \int_0^q \frac{du}{\pm 2\cos\frac{u}{2}} = \pm\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{q}{2}}{1-\sin\frac{q}{2}}$$

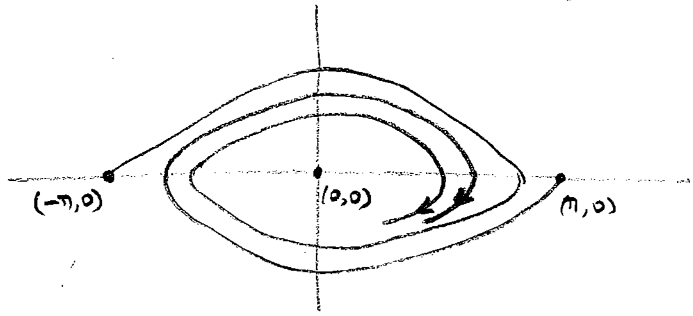
$$\Rightarrow q(t) = \pm 2\,\mathrm{arctg}(\sinh t), \quad p(t) = \dot{q}(t) = \pm\frac{2}{\cosh t}$$

Per a valors $h<2$, es poden relacionar les òrbites amb la funció $\mathrm{sn}(t,k)$ (problema 1.10)

Per al pèndol amb fregament (proporcional a la velocitat),

$\ddot{\varphi} + b\sin\varphi + a\dot{\varphi} = 0$, $a>0$, l'energia no és integral primera, sinó que decreix al llarg de les trajectòries: $\dot{H} = -a\dot{\varphi}^2$.

Llavors no hi ha distinció entre òrbites de libració i circulació, i no hi ha separatrius.



4) <u>Sistema de 2 oscil·ladors harmònics</u>

$$H(x_1,x_2,y_1,y_2) = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2+y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2+y_2^2).$$

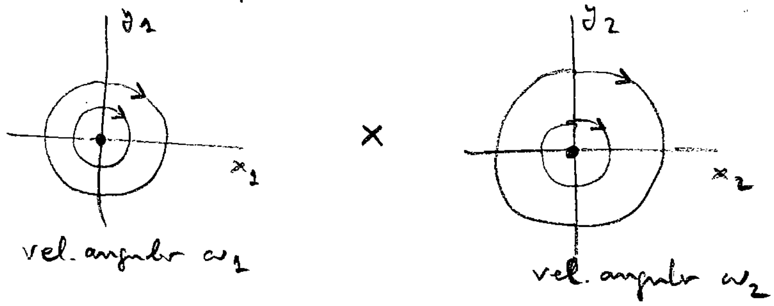
Equacions hamiltonianes: (lineals)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 y_1, & \dot{x}_2 = \omega_2 y_2, \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 x_1, & \dot{y}_2 = -\omega_2 x_2. \end{cases}$$

Tenim un sistema amb 2 g.d.l. que es pot separar en 2 sistemes independents amb 1 g.d.l.

Suposarem $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Nota: De fet els oscil·ladors harmònics pròpiament dits sempre són amb $\omega_j > 0$. Però un sistema d'aquest tipus també pot ser la linealització en un punt d'equilibri el·líptic d'un sistema hamiltonià no lineal. En aquest cas, les ω_i poden tenir signes diferents.

Per representar les òrbites, podem considerar un producte cartesià:



Observem que $I_1 = \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)$, $I_2 = \frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2)$ són integrals primeres

(i també $H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$ és i.p.)

Per donar una altra representació, fem el canvi simplèctic

$$\begin{cases} x_j = \sqrt{2I_j}\cdot \sin\phi_j \\ y_j = \sqrt{2I_j}\cdot \cos\phi_j \end{cases} \quad j=1,2 \quad \text{(coordenades "polars simplèctiques")}$$

$$\begin{cases} I_j \geq 0 \\ \phi_j \in S^1 \ (2\pi\text{-periòdiques}) \to (\phi_1,\phi_2) \in S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2 \end{cases}$$

tor 2-dimensional.

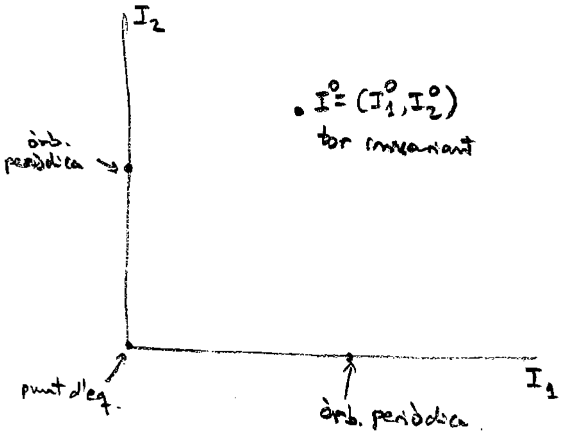
Ara el hamiltonià s'escriu $\hat{H}(\phi_1,\phi_2,I_1,I_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$,

$$\begin{cases} \dot\phi_1 = \omega_1, \quad \dot\phi_2 = \omega_2 \\ \dot I_1 = 0, \quad \dot I_2 = 0 \end{cases}$$ (pertant, I_1 i I_2 són integrals primeres)

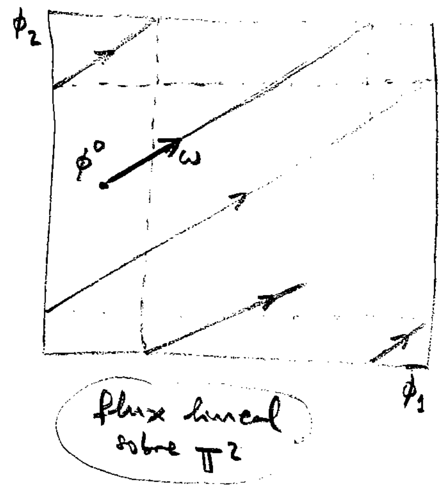
La trajectòria $(\phi(t), I(t))$ amb $(\phi(0), I(0)) = (\phi^0, I^0) = (\phi_1^0, \phi_2^0, I_1^0, I_2^0)$ ve donada per $\phi(t) = \phi^0 + \omega t$, $I(t) \equiv I^0$, on $\omega = (\omega_1,\omega_2)$ vector de freqüències

Per a cada $I^0 = (I_1^0, I_2^0)$, el conjunt $\mathcal{T}_{I^0} = \{(\phi, I) : I = I^0, \ \phi \in \mathbb{T}^2\}$ és invariant.

- Si $I_1^0 > 0$, $I_2^0 > 0$, tenim $\mathcal{T}_{I^0} \simeq \mathbb{T}^2 \Rightarrow$ tors invariants 2-dim.
- En el cas especial en què $I_1^0 > 0$, $I_2^0 = 0$ o $I_1^0 = 0$, $I_2^0 > 0$, les variables són degenerades i tenim $\mathcal{T}_{I_0} \simeq S^1 \Rightarrow$ òrbites periòdiques (anomenades modes normals)
- Per a $I_1^0 = I_2^0 = 0$ tenim punt d'equilibri (l'origen).

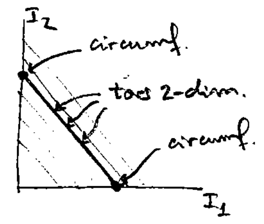


$\times$



En aquestes coordenades, els nivells d'energia venen donats per $H = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 = e$

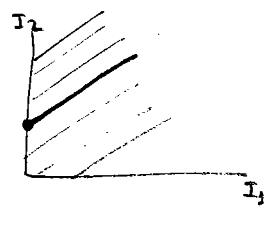
- Si ω_1, ω_2 del mateix signe:



$H^{-1}(e) \simeq S^3$, compacte.

(vegeu a [MeyerH, §I.A5] una descripció geomètrica més completa)

- Si ω_1, ω_2 de signes diferents:



$H^{-1}(e) \simeq$ hiperboloide 3-dim, no compacte.

(un con si $e=0$)

Generalització a <u>n oscil·ladors harmònics</u>:

$$H = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2+y_1^2)+\cdots+\frac{\omega_n}{2}(x_n^2+y_n^2)$$

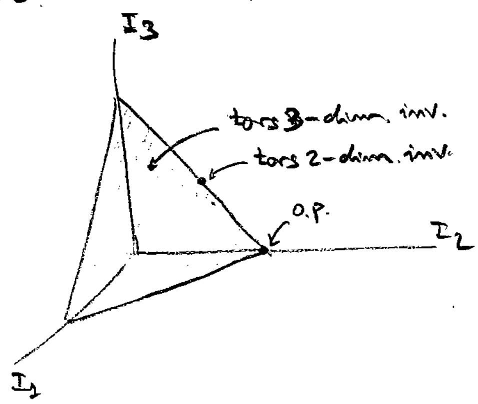
Tenim $I_j = \frac{1}{2}(x_j^2+y_j^2)$ integrals primeres, $j=1,\dots,n$.

Passant a les coordenades (ϕ, I), $\hat{H} = \omega_1 I_1 + \cdots + \omega_n I_n$.

$$\Rightarrow \quad \dot\phi_j = \omega_j, \quad \dot I_j = 0, \quad j=1,\dots,n.$$

$\mathcal{Z}_{I^0} = \{(\phi, I) : I = I^0, \phi \in \mathbb{T}^n\}$ conjunt invariant, que pot ser:

- tor n-dim. si $I_1^0>0, \dots, I_n^0>0$.
- tor (n-1)-dim.
- ⋮
- òrbita periòdica
- punt d'equilibri



* Fluxos lineals i translacions sobre un tor:

Sobre $\mathbb{T}^2$, donat un <u>vector de freqüències</u> $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, considerem el flux definit per $\dot\phi = \omega$, que té com a trajectòries $\phi(t) = \phi^0 + t\omega$, i òrbites $\{\phi^0 + t\omega : t \in \mathbb{R}\}$.

<u>Teorema 1</u>

(a) si $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$, totes les òrbites són <u>periòdiques</u>, amb període

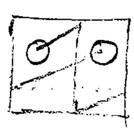
$$T = \text{mcm}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}\right) = \frac{2\pi p}{\omega_1} = \frac{2\pi q}{\omega_2}$$ si escrivim $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ fracció irreductible

(b) si $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, totes les òrbites són <u>denses</u> a $\mathbb{T}^2$.

En el cas (b), podem dir que les òrbites són <u>quasiperiòdiques</u>:

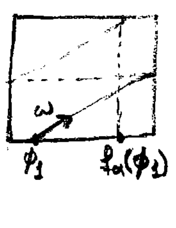
$$\phi(t) \neq \phi^0 \;\; \forall t \neq 0, \quad i \quad \forall \varepsilon>0, M>0, \; \exists |t|>M : \|\phi(t)-\phi^0\| < \varepsilon.$$

També podem dir que el flux és <u>topològicament transitiu</u>: dos entorns qualssevol $B_\varepsilon(\phi^0)$ i $B_{\varepsilon'}(\phi^1)$ estan sempre connectats per alguna òrbita.



Per provar el teorema 1, definim l'aplicació de Poincaré sobre la secció $\phi_2 = 0$ (transversal al flux, suposant $\omega_2 \neq 0$). Així estudiem un sistema dinàmic continu en dim. 2 a partir d'un sistema dinàmic discret en dimensió 1.

Com que per a $\phi(0) = (\phi_1^0, 0)$ tenim $\phi\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) = \left(\phi_1^0 + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}, 0\right) \pmod{2\pi}$, definim el difeo $f_\alpha : S^1 \to S^1$, $f_\alpha(\phi_1) = \phi_1 + 2\pi\alpha$, essent $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}$.
(translació o "<u>rotació de S^1</u>")



Teorema 2. Considerem el difeo de S^1 definit per $f_\alpha(\phi_1)=\phi_1+2\pi\alpha$.

(a) Si $\alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ (fracció irreductible), tenim $f^q=id$, $f^j\neq id$ $\forall\, 1\le j\le q-1$, i per tant l'òrbita $\{f^j(\phi_1)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ és q-periòdica, $\forall\phi_1\in S^1$.

(b) Si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, l'òrbita $\{f^j(\phi_1)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ és densa a S^1, $\forall\phi_1\in S^1$.

A partir del teo. 2 podem deduir fàcilment el teo. 1. Per a l'apartat (a), notem que si $f_\alpha^q=id$ amb $\alpha=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{p}{q}$, llavors una òrbita $\phi(t)=\phi^0+t\omega$ tindrà període $T=q\cdot\frac{2\pi}{\omega_2}=\mathrm{mcm}\left(\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{2\pi}{\omega_2}\right)$.

Prova del teo. 2.

L'apartat (a) és fàcil.
Per provar (b), podem suposar que $\phi_1=0$. Llavors hem de veure que la successió $\gamma_j=2\pi j\alpha$, $j\in\mathbb{Z}$, és densa a S^1, és a dir, donats $\beta\in S^1$ i $\varepsilon>0$, $\exists\, j\in\mathbb{Z}$ t.q. $\gamma_j\in(\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)$. Com que els γ_j són tots diferents, i S^1 té longitud finita, n'hi haurà dos d'ells a distància $<\varepsilon$ i restant-los tenim un $\gamma_m\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Llavors dins la successió $\gamma_m,\gamma_{2m},\gamma_{3m},\dots$ dos termes consecutius es troben sempre a distància $<\varepsilon$ i per tant algun $\gamma_{Nm}\in(\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)$.

Estudiem ara la generalització a $\mathbb{T}^n=S^1\times\overset{(n)}{\cdots}\times S^1=\{\phi=(\phi_1,\dots,\phi_n)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$, considerant per a $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{R}^n$ donat el flux definit per $\dot\phi=\omega$.
Veurem que el tipus de flux depèn també fortament de les propietats del vector de freqüències ω, però que podem observar-hi situacions més diverses que en el cas $n=2$.

Def. El vector ω és <u>no ressonant</u> (o $\omega_1,\dots,\omega_n$ són racionalment independents) si $\langle k,\omega\rangle=k_1\omega_1+\dots+k_n\omega_n\neq0$ $\forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$.

Teorema 3.

(a) Les òrbites són periòdiques $\iff$ $\frac{\omega_1}{\omega_n},\dots,\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\in\mathbb{Q}$

(b) Les òrbites són denses $\iff$ ω no ressonant

Però hi ha situacions intermitges: les òrbites també poden omplir densament un conjunt difeomorf a $S^1,\mathbb{T}^2,\dots,\mathbb{T}^{n-1},\mathbb{T}^n$. Això dependrà de la dimensió del <u>mòdul de ressonàncies</u>: $\mathcal{M}_\omega=\{k\in\mathbb{Z}^n:\ \langle k,\omega\rangle=0\}$ (subgrup de $\mathbb{Z}^n$).

Per provar el teo. 3, es considera l'aplicació de Poincaré sobre la secció $\phi_n = 0$ (suposant $\omega_n \neq 0$), obtenint una translació $f_\alpha : \mathbb{T}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{T}^{n-1}$, donada pel vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}, \dots, \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\right)$

Notem que ω és no ressonant $\Longleftrightarrow$ $(\alpha, 1) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ no ressonant.

De fet, el teo 3(b) també es pot obtenir com a conseqüència del següent resultat, una mica més precís, que s'inscriu dins de la teoria ergòdica.

Teorema de Weyl (vegeu [Armold - MMMC, §51B-C]).

Sigui $\omega \in \mathbb{R}^n$ no ressonant, i $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció integrable de Riemann. Aleshores,

$$\exists \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\phi^0 + s\omega)\,ds}_{\text{(mitjana temporal de } f \text{ sobre una trajectòria)}} \quad \forall \phi^0 \in \mathbb{T}^n, \text{ i coincideix amb } \underbrace{\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(\phi)\,d\phi_1 \cdots d\phi_n}_{\text{(mitjana espacial de } f\text{)}}.$$

Prenent $f = \chi_D$ (funció característica), essent D per exemple qualsevol "rectangle" de $\mathbb{T}^n$, obtenim el teorema d'equirepartició: el temps mitjà de permanència d'una trajectòria en el domini D és proporcional a la mesura de D. Això ens dóna, per a freqüències no ressonants, la distribució uniforme de les trajectòries i, com a conseqüència, que aquestes són denses sobre $\mathbb{T}^n$.

5) Sistema d'una partícula en un camp central.

- Considerem a $\mathbb{R}^3$ el moviment d'una partícula descrit per un sistema del tipus $\boxed{\ddot{q} = f(\|q\|)\frac{q}{\|q\|}}$ (*)

la força sempre té la mateixa direcció que el vector que uneix l'origen amb q.

El cas particular més important és el problema de Kepler, que correspon al problema de 2 cossos de masses M i m amb el de massa M fix a l'origen. El moviment del cos de massa m ve descrit per

$$m\ddot{q} = -G\frac{Mm}{\|q\|^2}\frac{q}{\|q\|},$$ per tant en aquest cas $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$, on $\mu = GM$.

- El sistema (*) ve descrit pel hamiltonià $\boxed{H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(\|q\|)}$ (**) (3 g.d.l.)

amb $V(r) = -\int f(r)\,dr$. Les equacions, usant que $\nabla(\|q\|) = \frac{q}{\|q\|}$, són:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -V'(\|q\|)\frac{q}{\|q\|} = f(\|q\|)\frac{q}{\|q\|} \end{cases}$$

En el cas del problema de Kepler, $V(q) = -\frac{\mu}{r}$.

- El vector $m\, q \times \dot{q}$ (producte vectorial) és el moment angular de la partícula. Suposem $m=1$, i definim la funció $\boxed{M(q,p) = q \times p}$

És fàcil comprovar que els 3 components del vector M són integrals primeres: $\{M_1, H\} = \{M_2, H\} = \{M_3, H\} = 0$.
(notem que $\dot{M} = \dot{q}\times p + q \times \dot{p} = 0$ sobre qualsevol trajectòria) $c = (c_1, c_2, c_3)$
Així, sobre cada trajectòria tenim $M_i(q,p) \equiv c_i$ i deduïm que $\langle c, q\rangle \equiv 0$.
Per tant, el moviment té lloc sobre el pla perpendicular al moment angular, que passa per l'origen.

Per tant, podem suposar el hamiltonià (∗∗) per a 2 g.d.l. (fent $q_3=p_3=0$) i tenim, a més de H, la integral primera $M_3(q,p)=q_1p_2-q_2p_1$.
(això ens diu que tenim un sistema integrable pel teorema de Liouville-Arnold)

Posant $M_3(q,p)=c\,(=c_3)$, tenim: [considerant $q,p\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ per al producte vectorial].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\|q\|}\right)=\frac{1}{\|q\|^3}\left(\|q\|^2p-\langle q,p\rangle q\right)=\frac{(q\times p)\times q}{\|q\|^3}=\frac{c\cdot(-q_2,q_1)}{\|q\|^3}.$$

En el cas $c=0$, es dedueix que $\frac{q}{\|q\|}\equiv$ const., i per tant el moviment té lloc sobre una recta per l'origen (1 g.d.l.) [probl. 1.16]

Per a $c\neq 0$, prenent coordenades polars $q_1=r\cos\theta$, $q_2=r\sin\theta$ es pot deduir que $\frac{1}{2}r^2\dot\theta\equiv$ const. (2ª llei de Kepler: la partícula escombra àrea a velocitat constant)

En el cas del problema de Kepler, $\underline{V(r)=-\frac{\mu}{r}}$, resulta que

$$\mu\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\|q\|}\right)=c\,(\dot p_2,-\dot p_1),\ \text{i es dedueix que}\ \mu\left(e+\frac{q}{\|q\|}\right)=c\,(p_2,-p_1),$$

on e és un vector constant. Llavors es pot veure, passant a coordenades polars, que el moviment de la partícula satisfà l'equació

$$r=\frac{c^2/\mu}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)},$$

essent ε,θ_0 les coord. polars del vector e.

Això ens diu que el moviment té lloc sobre una cònica, d'excentricitat ε i amb un focus a l'origen (1ª llei de Kepler).
Per a més detalls, consulteu [Pollard].