SISTEMES HAMILTONIANS LINEALS.

Matrius hamiltonianes i simplèctiques

- Una funció quadràtica $H(x,t) = \frac{1}{2} x^T S(t) x$, amb $S(t)$ simètrica $2n \times 2n$, i contínua per a $t \in I$, dóna lloc a un sistema hamiltonià lineal:

$$\dot{x} = B(t)\, x, \qquad \text{on} \quad B(t) = J S(t).$$

- Definicions

  a) Una matriu B és **hamiltoniana** (o infinitesimalment simplèctica, o infinitesimalment canònica) si es pot escriure en la forma $B = JS$, amb S simètrica ($\Longleftrightarrow B^T J + J B = 0$)

  b) Una matriu A és simplèctica (o canònica) si $A^T J A = J$.

Denotem $sp(n) = sp(n, \mathbb{R})$ l'espai de totes les matrius $2n \times 2n$ hamiltonianes (és una àlgebra de Lie: probl. 2.2), i $Sp(n) = Sp(n, \mathbb{R})$ el grup de totes les matrius $2n \times 2n$ simplèctiques.

- En el cas $n = 1$ (matrius 2×2), aquests conceptes són molt simples:

  B hamiltoniana $\Longleftrightarrow \operatorname{tr} B = 0$

  A simplèctica $\Longleftrightarrow \det A = 1$

- En general (n qualsevol), escrivint $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$,
  (blocs $n \times n$)

  B hamiltoniana $\Longleftrightarrow B_1^T + B_4 = 0$ i B_2, B_3 simètriques.

  A simplèctica $\Longleftrightarrow A_1^T A_4 - A_3^T A_2 = I$; $A_1^T A_3$, $A_2^T A_4$ simètriques.

De les definicions es dedueix que $\operatorname{tr} B = 0$, i que $\det A = \pm 1$, però es pot veure que sempre és $\det A = 1$. (problemes 2.4 i 2.8).

- Per a un sistema lineal hamiltonià $\dot{x} = B(t) x$, la matriu principal $\Phi(t)$ és simplèctica $\forall t$. (problema 2.5)
  Com a cas particular, deduïm que si B és matriu (constant) hamiltoniana, llavors la seva exponencial e^{tB} és simplèctica $\forall t$

Espais vectorials símplèctics.

• **Def.** Un espai simplèctic (E,Ω) consisteix en:

E espai vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de dim. $2n$

$\Omega : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ forma simplèctica $\left\{ \begin{array}{l} \text{bilineal} \\ \text{alternada (antisimètrica: } \Omega(u,v)=-\Omega(u,v)) \\ \text{no degenerada (si } u\neq 0,\ \exists\, v:\ \Omega(u,v)\neq 0) \end{array}\right.$

En una base $v_1,\dots,v_{2n}$ de E, la forma simplèctica Ω vindrà donada per una matriu:

$$\Omega(u,v) = \alpha^T R \beta, \quad \text{per a} \quad u=\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j v_j,\ v=\sum_{j=1}^{2n}\beta_j v_j$$

La matriu R, de coeficients $R_{jk}=\Omega(v_j,v_k)$, és antisimètrica $(R^T=-R)$ i no singular $(\det R\neq 0)$. Si fem un canvi de base donat per una matriu Q, $\det Q\neq 0$, la matriu de Ω en la nova base és $Q^T R Q$.

• Exemple: $(\mathbb{R}^{2n},\Omega^0)$, $\Omega^0(u,v)=u^T J v$ forma simplèctica standard, $J=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{pmatrix}$.

Si les coordenades de $\mathbb{R}^{2n}$ són $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$, es pot escriure:

$$\boxed{\Omega^0 = \sum_{j=1}^{n} dq_j\wedge dp_j},$$ essent $\left.\begin{array}{l} dq_j(u)=u_j \\ dp_j(u)=u_{n+j}\end{array}\right\}$ (formes lineals o 1-formes)

$$dq_j\wedge dp_j(u,v)=\begin{vmatrix} dq_j(u) & dq_j(v) \\ dp_j(u) & dp_j(v)\end{vmatrix} = u_j v_{n+j}-u_{n+j}v_j$$

(forma bilineal alternada o 2-forma)

En el cas $n=1$, $\Omega^0(u,v)=\det(u,v)$ és l'àrea (amb signe) del paral·lelogram generat per u,v.

• Teorema. (E,Ω) espai simplèctic.

$\exists$ una base en la qual la matriu de la forma simplèctica Ω és J.

(és a dir, $\exists$ un canvi de base Q t.q. $Q^T R Q = J$)

Aquesta base s'anomena base simplèctica.

La generalització d'aquest teorema a varietats simplèctiques és el teo. de Darboux.

Prova. Escollim $v_1\neq 0$, i v_2: $\Omega(v_1,v_2)\neq 0$, podem fer que $\Omega(v_1,v_2)=1$.

El subespai $E_1=\{u\in E:\ \Omega(u,v_1)=\Omega(u,v_2)=0\}$ té dim $2n-2$,

i podem escriure $E=\langle v_1,v_2\rangle\oplus E_1$ (ja que $v_1,v_2\notin E_1$).

La matriu de Ω en una base formada per v_1,v_2, i una base de E_1, és

$$R=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & R_1\end{array}\right),$$ amb R_1 antisimètrica i no singular.

Resulta doncs que $(E_1;\Omega|_{E_1})$ és un subespai simplèctic de E, amb matriu R_1

(ja que $\Omega|_{E_1}$ és no degenerada)

Iterant el procés, obtenim una base de E en la qual la matriu de Ω és

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$$

, i canviant l'ordre dels vectors ens queda $J = \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix}$

• Def. Donats espais simplèctics (E_1, Ω_1), (E_2, Ω_2), una aplicació lineal simplèctica és $L: E_1 \longrightarrow E_2$ lineal, tal que $\Omega_2(Lu, Lv) = \Omega_1(u,v) \quad \forall u,v \in E_1$.

Fixant bases, la relació entre les matrius és $A^T R_2 A = R_1$.

Es dedueix del teorema anterior que tot espai simplèctic és simplècticament isomorf a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega^0)$

Donada una aplicació simplèctica $L: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, conserva la forma simplèctica standard: $\Omega^0(Lu, Lv) = \Omega^0(u,v)$, i en la base canònica la seva matriu és simplèctica: $A^T J A = J$.

Espectres de matrius hamiltonianes i simplèctiques

Estudiarem les possibles configuracions de valors propis per a matrius hamiltonianes i simplèctiques.

Proposició.

a) B hamiltoniana.

Si λ valor propi de B $\Rightarrow -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ són valors propis de B, amb la mateixa multiplicitat que λ.

Si 0 és valor propi de B, té multiplicitat parella.

b) A simplèctica

Si μ valor propi de A $\Rightarrow 1/\mu, \bar{\mu}, 1/\bar{\mu}$ són valors propis de A, amb la mateixa multiplicitat que μ.

Si 1 o -1 són valors propis de A, tenen cadascun multiplicitat parella.

Prova.

a) Suposem λ vap de B, amb vep v.

$Bv = \lambda v \implies B^T J v = -JBv = -\lambda . Jv$.

Així, $-\lambda$ és vap de B^T, amb vep Jv, i per tant $-\lambda$ vap també de B

De fet, $B = J^{-1}(-B^T)J \implies B$ i $-B^T$ són matrius (simplècticament) similars

$\implies$ les multiplicitats de λ i $-\lambda$ com a vaps de B és la mateixa

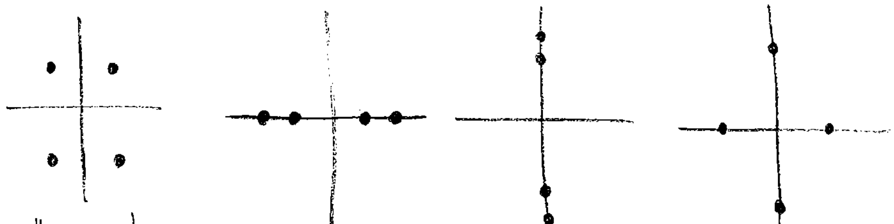
(i fins i tot tenen les mateixes caixes de Jordan)

D'altra banda, $\bar{\lambda}$ i $-\bar{\lambda}$ també són vaps de B, ja que B és real.

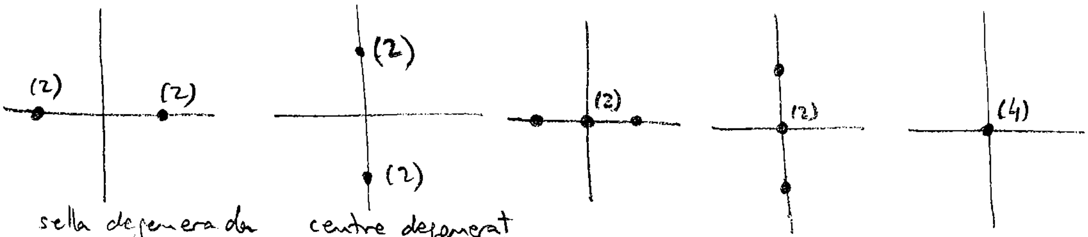
Tenim així els vaps $\neq 0$ agrupats en parelles o quaternes $\Rightarrow$ el 0 té multiplicitat parella.

b) Similar, usant ara que $A = J^{-1}(A^{-1})^T J$, i aplicant que $\det A = 1$.

Per a matrius hamiltonianes 4×4, les possibles configuracions de valors propis són:

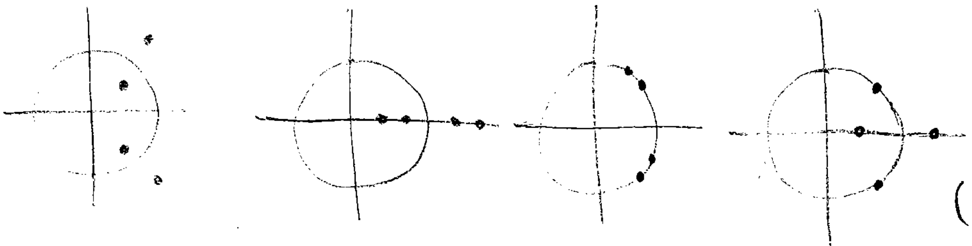


sella complexa — sella real — centre — sella-centre



sella degenerada — centre degenerat

Per a matrius simplèctiques 4×4:



etc.

(hi ha més casos degenerats, considerant 1 i -1 com a possibles vaps)

- **Def.** Dues matrius hamiltonianes B_1, B_2 són <u>simplècticament similars</u> si $B_2 = T^{-1}B_1T$ per alguna matriu simplèctica T.
  (llavors, aplicant el canvi $x = Ty$ al sistema $\dot{x} = B_1x$, obtenim $\dot{y} = B_2 y$)

Com que aquesta noció és més restrictiva que la de matrius similars ordinària (amb qualsevol T no singular), podem esperar més formes canòniques de matrius des del punt de vista simplèctic que amb les formes de Jordan usuals.

<u>Exemple</u>. les matrius $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ i $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ no són simplècticament similars, ja que els fluxos corresponents giren en sentits diferents, i per tant no pot existir una transformació que conservi l'orientació i porti un flux en l'altre (de fet, si $B_2 = T^{-1}B_1T$ llavors $e^{tB_2} = T^{-1}e^{tB_1}T$)

Per provar que B_1 i B_2 no són simplècticament similars, usem que
$\Omega^0(v, B_1v) = v^TJB_1v = -\beta v^Tv < 0$, $\Omega^0(v, B_2v) = v^TJB_2v = \beta v^Tv > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$,
i si tinguéssim $B_2 = T^{-1}B_1T$ llavors seria $\Omega^0(v, B_2v) = \Omega^0(Tv, B_1Tv)$.

També podem observar que les matrius B_1 i B_2 corresponen als hamiltonians

$$H_1 = \frac{\beta}{2}(q^2+p^2) \quad i \quad H_2 = -\frac{\beta}{2}(q^2+p^2)$$

- És fàcil establir la forma canònica, des del punt de vista simplèctic, d'una matriu B amb tots els valors propis simples.

(per al cas general amb B no diagonalitzable, vegeu [Arnold – MMMC, apèndix 6] o [Meyer H, § II.D])

Agrupem els vaps de B en parelles o quaternes: $\pm\alpha_j$, $\pm i\beta_j$, $\pm\gamma_j \pm i\delta_j$,
i a cadascuna li podem associar un subspai invariant de dim. 2 o 4.

* vaps reals $\pm\alpha_j$, amb veps $u_j^{(1)}, u_j^{(2)}$ $\rightsquigarrow$ subspai $F_j = \langle u_j^{(1)}, u_j^{(2)} \rangle$

* vaps imaginaris $\pm i\beta_j$, amb veps $v_j, \overline{v_j}$;
escrivint $v_j = v_j^{(1)} + i\, v_j^{(2)} \rightsquigarrow$ subspai $G_j = \langle v_j^{(1)}, v_j^{(2)} \rangle$

* vaps complexos $\pm\gamma_j \pm i\delta_j$, amb veps $w_j, \overline{w_j}, w_j', \overline{w_j'}$;
escrivint $w_j = w_j^{(1)} + i\, w_j^{(2)}$, $w_j' = w_j^{(3)} + i\, w_j^{(4)}$
$\rightsquigarrow$ subspai $H_j = \langle w_j^{(1)}, w_j^{(2)}, w_j^{(3)}, w_j^{(4)} \rangle$

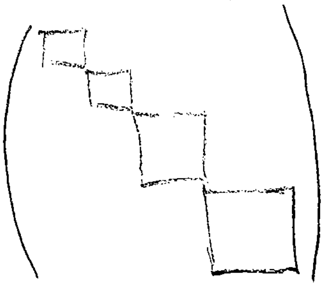
Tenim així la descomposició $\mathbb{R}^{2n} = \left(\bigoplus_j F_j\right) \oplus \left(\bigoplus_j G_j\right) \oplus \left(\bigoplus_j H_j\right)$.

Lema. Si B és matriu hamiltoniana i v_1, v_2 són vectors propis de valor propi λ_1, λ_2 respectivament, amb $\lambda_2 \neq -\lambda_1$, llavors v_1, v_2 són J-ortogonals: $v_1^T J v_2 = 0$.

Prova: $\lambda_1 v_1^T J v_2 = (B v_1)^T J v_2 = -v_1^T J B v_2 = -\lambda_2 v_1^T J v_2$

Aquest lema implica que cada subspai F_j, G_j, H_j és J-ortogonal a tots els altres.
Se'n dedueix que tots són subspais simplèctics, ja que la 2-forma simplèctica Ω^0 és no degenerada sobre cadascun d'ells (per exemple, si $u \in F_1$, $\exists v \in F_1 : \Omega^0(u,v) \neq 0$, ja que F_1 és J-ortogonal a tots els altres F_j, G_j, H_j)

Escollint una base simplèctica sobre cada subspai, tindrem una base simplèctica a tot $\mathbb{R}^{2n}$ que ens donarà una matriu simplèctica T, tal que $T^{-1} B T$ té una estructura en blocs 2×2 o 4×4:



* Sobre F_j, els veps $u_j^{(1)}, u_j^{(2)}$ satisfan $\Omega^0(u_j^{(1)}, u_j^{(2)}) = c \neq 0$.
  Llavors la base $u_j^{(1)}, \frac{1}{c} u_j^{(2)}$ és simplèctica

$$\rightsquigarrow \text{ bloc } \begin{pmatrix} \alpha_j & \\ & -\alpha_j \end{pmatrix}$$

* Sobre G_j, tenim $B v_j^{(1)} = -\beta_j v_j^{(2)}$, $B v_j^{(2)} = \beta_j v_j^{(1)}$, amb $\Omega^0(v_j^{(1)}, v_j^{(2)}) = c \neq 0$.
  Si $c > 0$ prenem la base $\frac{1}{\sqrt{c}} v_j^{(1)}, \frac{1}{\sqrt{c}} v_j^{(2)} \rightsquigarrow$ bloc $\begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{pmatrix}$
  Si $c < 0$ " " $\frac{1}{\sqrt{-c}} v_j^{(2)}, \frac{1}{\sqrt{-c}} v_j^{(1)} \rightsquigarrow$ bloc $\begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}$

  [Tenir un cas o l'altre, no dependrà de la tria dels veps $v_j, \bar{v}_j$].

* Sobre H_j, ⋯ → problema <u>2.14</u>.

<u>Estabilitat de sistemes hamiltonians lineals.</u>

• Donat un sistema lineal $\dot{x} = Bx$, sabem:
  * és asimptòticament estable (totes les solucions tendeixen a 0 per a $t \to \infty$)
    $\iff$ tots els vaps de B tenen part real < 0.
  * és estable (totes les solucions fitades per a $t > 0$)
    $\iff$ tots els vaps de B tenen part real ≤ 0 i els que tenen part real $= 0$ són semi-simples.

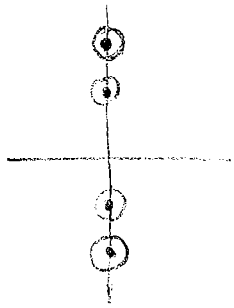
Si B és matriu <u>hamiltoniana</u>, per la configuració dels seus valors propis tenim:
  * el sistema no és <u>mai</u> asimptòticament estable.
  * és estable $\iff$ tots els vaps de B són imaginaris purs, i B és diagonalitzable.

• Per a un sistema lineal periòdic $\dot{x} = B(t)x$, de període T, sabem:
  * La matriu principal $\Psi(t)$ porta associada una matriu de monodromia $M = M_\Psi$:
    $\Psi(t+T) = \Psi(t) \cdot M$. Les altres matrius de monodromia del sistema són totes similars a M, i els seus vaps reben el nom de multiplicadors característics.
  * Escrivint $M = e^{TK}$, tenim $\Psi(t) = P(t) e^{tK}$, on $P(t)$ és T-periòdica i K és una matriu constant (teorema de Floquet).
    De fet, el canvi $x = P(t) y$ transforma el sistema en $\dot{y} = Ky$ (coefs constants).
    Les matrius $P(t)$ i K poden ser complexes, però si definim K per $M^2 = e^{2TK}$ i permetem que $P(t)$ sigui $2T$-periòdica, llavors $P(t)$ i K seran reals.

Si $B(t)$ hamiltoniana $\forall t$,
  * la matriu de monodromia M és simplèctica.
  * podem prendre K hamiltoniana (vegeu [Meyer H, § II. Ap]), i llavors $P(t)$ és simplèctica.
  * el sistema és estable $\iff$ tots els vaps de M tenen mòdul 1, i M és diagonalitzable.

- **Def** El sistema $\dot{x} = Bx$, amb B hamiltoniana (constant) és <u>paramètricament estable</u> si $\exists\, \varepsilon > 0$: $\dot{x} = \tilde{B}x$ és estable per a tota matriu hamiltoniana $\tilde{B}$ amb $\|\tilde{B} - B\| < \varepsilon$.

Proposició Si tots els valors propis de B són imaginaris purs i simples, aleshores el sistema $\dot{x} = Bx$ és paramètricament estable.



Prova Els vaps de $\tilde{B}$ estaran en entorns dels vaps de B. Aquests entorns seran disjunts si ε és prou petit
$\Rightarrow$ entre els vaps de $\tilde{B}$ no hi haurà cap quaterna $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$
$\Rightarrow$ els vaps de $\tilde{B}$ també són tots imaginaris purs i simples.

Com veiem, només quan es produeixen "xocs" entre els vaps poden aparèixer quaternes complexes.

Així, si B té vaps imaginaris múltiples, encara que B diagonalitzi, en general el sistema serà paramètricament inestable.

Proposició Si la funció hamiltoniana $H(x) = \frac{1}{2} x^T S x$ és definida (positiva o negativa), per a $B = JS$ el sistema $\dot{x} = Bx$ és paramètricament estable.

Prova Suposem $H(x)$ definida positiva. Els nivells d'energia $H^{-1}(h)$ per a $h > 0$ són el·lipsoides, i per tant tota solució és fitada. Això ens diu que el sistema $\dot{x} = Bx$ és estable. Amb una petita pertorbació $\tilde{B}$, els nivells d'energia $\tilde{H}^{-1}(h)$ segueixen essent el·lipsoides, i per tant $\dot{x} = \tilde{B}x$ també és estable.

Nota N'hi hauria prou demanant $H(x)$ definida sobre el subespai associat a cada parell de vaps $\pm i\beta_j$.

Exemples

$$\left.\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - 2(q_2^2 + p_2^2) \\ H &= \tfrac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \tfrac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) \end{aligned}\right\} \text{ paramètricament estables}$$

$$H = \tfrac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \tfrac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) \longrightarrow \quad \text{"} \quad \text{inestable}$$

En el 3^er cas, observem que
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$