SISTEMES HAMILTONIANS NO LINEALS: ESTUDI PROP DE PUNTS D'EQUILIBRI

Punts d'equilibri i teorema de Dirichlet:

$H: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ hamiltonià amb n graus de llibertat.

$\dot{x} = X_H(x) = J \cdot \nabla H(x)$ sistema hamiltonià (autònom)

Un punt $x^0 \in \mathcal{U}$ és punt d'equilibri $\Longleftrightarrow$ $\nabla H(x^0) = 0$ (punt crític de H)

• Teorema de Dirichlet

Si x^0 és un mínim o màxim local **(aïllat)** de H, aleshores és un punt crític **estable** (en sentit de Lyapunov).

Prova. Donat $\varepsilon > 0$, hem de veure que $\exists\, \delta > 0 : \|x - x^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi_t(x) - x^0\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$

Suposarem $x^0 = 0$, $H(0) = 0$, i que és mínim local.

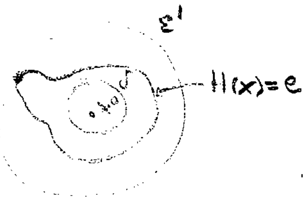
$\exists\; 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon : \quad H(x) > 0 \quad \forall\, 0 < \|x\| < \varepsilon'$.

Dient $e = \min\limits_{\|x\| = \varepsilon'} H(x) > 0$, $\quad \exists\, \delta > 0 : H(x) < e \quad \forall\, \|x\| < \delta$.

Si $\|x\| < \delta$, tenim $H(\varphi_t(x)) = H(x) < h \quad \forall t$

$\Rightarrow \|\varphi_t(x)\| < \varepsilon' \leq \varepsilon \quad \forall t$

(si no, per algun t tindríem $H(\varphi_t(x)) = e$)



Podrem aplicar aquest teorema quan la matriu $D^2 H(x^0)$ sigui definida positiva o negativa.

Exemple. $H(q, p) = \dfrac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$.

Si q^0 és mínim local **(aïllat)** de $V \Rightarrow (q^0, 0)$ punt crític estable

• En general, per estudiar l'estabilitat d'un punt crític x^0 del sistema $\dot{x} = X_H(x)$, convé considerar el sistema linealitzat en x^0:

$$\boxed{\dot{x} = DX_H(x^0) \cdot (x - x^0)}$$

Els valors propis de $DX_H(x^0) = J \cdot D^2 H(x^0)$ (matriu hamiltoniana) reben el nom d'exponents característics de X_H en x^0.

Si algun exponent característic té part real $> 0 \Rightarrow x^0$ és inestable.

Per tant, una condició **necessària** per a l'estabilitat del punt crític x^0 és que tots els exponents característics siguin imaginaris purs:

$\pm i\,\omega_1^0, \ldots, \pm i\,\omega_n^0 \longrightarrow$ cas d'un punt d'equilibri el·líptic.

Suposem $x^0=0$, $H(0)=0$.

Proposició. Si els exponents característics $\pm i\omega_1^0, \dots, \pm i\omega_n^0$ són tots simples, aleshores fent un canvi simplèctic lineal el hamiltonià es pot escriure en la forma

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^0 (q_j^2 + p_j^2) + H_3 + H_4 + \dots \qquad (1)$$

($\omega_1, \dots, \omega_n$ són les freqüències característiques, amb signes ben determinats)

Prova. Desenvolupem $H(x) = H_2(x) + H_3(x) + H_4(x) + \dots$, $H_2(x) = \frac{1}{2} x^T D^2H(0)\, x$.

(termes homogenis en x)

$$\dot{x} = X_H(x) = Bx + J\nabla H_3(x) + J\nabla H_4(x) + \dots, \quad B = JD^2H(0)$$

Els vaps de B són els exp. característics $\pm i\omega_1^0, \dots, \pm i\omega_n^0$.

Hi ha un canvi simplèctic lineal T tal que

$$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \omega_1^0 \\ -\omega_1^0 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \omega_n^0 \\ -\omega_n^0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

on els signes de $\omega_1^0, \dots, \omega_n^0$ venen determinats per la matriu B.

El nou hamiltonià és $\hat{H}(x) = H(Tx) = \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \dots$,

amb $\hat{H}_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^0 (q_j^2 + p_j^2)$ ja que $\hat{B} = T^{-1}BT$.

(per al cas que els exp. característics no són simples, vegeu [Williamson36])

Comentaris

* si $\omega_j^0 > 0\ \forall j$ o $\omega_j^0 < 0\ \forall j$ $\Longrightarrow$ $x^0=0$ és estable (pel teo. de Dirichlet).

* si $\exists\, \omega_i^0 > 0$, $\omega_j^0 < 0$ $\rightsquigarrow$ no podem assegurar estabilitat (exemple: punt L_4 del problema restringit de 3 cossos)

En aquest cas (en què no es pot aplicar el teo. de Dirichlet), el problema de si $x^0=0$ és un punt crític **estable** per al hamiltonià H no és fàcil, però podem donar algunes respostes parcials, a partir dels teoremes KAM i Nekhoroshev.

- Exemple : punts d'equilibri el·líptics en el Problema Restringit de Tres Cossos

Com a il·lustració, considerarem el hamiltonià del Problema Restringit de Tres Cossos (RTBP), estudiarem els seus punts d'equilibri, dels quals 2 seran el·líptics, i trobarem les seves freqüències característiques.

Primer donem una breu descripció del RTBP (vegeu més detalls en llibres de mecànica celest, com [Szebehely], [Pollard] o també en [Jorba99, apèndix B]).

Es consideren dues masses (cossos primaris) que s'atrauen per la força gravitatòria, i hom suposa que es mouen en òrbites circulars entorn del seu centre de masses comú. Es tracta d'estudiar el moviment d'una partícula sota l'atracció dels dos cossos primaris, suposant que aquesta partícula no té cap efecte sobre el moviment dels cossos primaris. (exemples: Sol-Júpiter-asteroide, Terra-Lluna-satèl·lit).

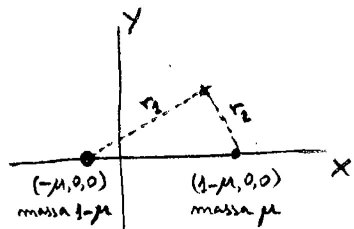
Per simplificar, prenent unitats de massa, longitud i temps adequades podem suposar, per als dos cossos primaris: suma de les masses $=1$, distància $=1$, període del moviment $=2\pi$, constant gravitatòria $=1$. Denotarem μ, $1-\mu$ les masses dels primaris, amb $0<\mu\le\frac{1}{2}$

(p.ex $\mu \simeq 0.953875\cdot 10^{-3}$ en el cas Sol-Júpiter,
$\mu \simeq 0.01215$ en el cas Terra-Lluna).

Es pot considerar un sistema de referència giratori (anomenat sistema sinòdic), amb origen al centre de masses, i que deixi fixos els dos cossos primaris, el de massa $1-\mu$ al punt $(-\mu,0,0)$ i el de massa μ al punt $(1-\mu,0,0)$. En el sistema sinòdic, el moviment de la partícula ve descrit pel següent hamiltonià autònom:

$$H(X,Y,Z,P_X,P_Y,P_Z) = \frac{1}{2}(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2)+YP_X-XP_Y - \frac{1-\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1^2=(X+\mu)^2+Y^2+Z^2, \quad r_2^2=(X-1+\mu)^2+Y^2+Z^2$$



on (X,Y,Z) són les posicions, i (P_X,P_Y,P_Z) els seus moments conjugats (es pot justificar a partir de la formulació lagrangiana)

Equacions hamiltonianes:
$$\begin{cases} \dot X = P_X + Y \\ \dot Y = P_Y - X \\ \dot Z = P_Z \\ \dot P_X = P_Y - \dfrac{(1-\mu)(X+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(X-1+\mu)}{r_2^3} \\ \dot P_Y = -P_X - \dfrac{(1-\mu)Y}{r_1^3} - \dfrac{\mu Y}{r_2^3} \\ \dot P_Z = -\dfrac{(1-\mu)Z}{r_1^3} - \dfrac{\mu Z}{r_2^3} \end{cases}$$

Busquem els punts d'equilibri: trobant (X,Y,Z), tindrem $(P_X,P_Y,P_Z)=(-Y,X,0)$.

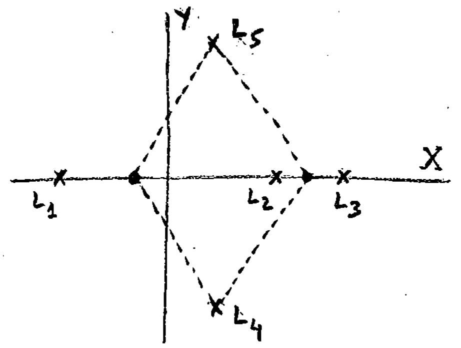
De $\dot P_Z=0$ deduïm $Z=0$

$$\dot P_Y = 0 \implies \begin{cases} Y=0 & (a) \\ \dfrac{1-\mu}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}=1 & (b) \end{cases}$$

En el cas (a), $r_1 = |X+\mu|$, $r_2 = |X-1+\mu|$ i llavors l'equació $\dot{P}_X = 0$ s'escriu com $X = \frac{(1-\mu)(X+\mu)}{|X+\mu|^3} + \frac{\mu(X-1+\mu)}{|X-1+\mu|^3}$, i estudiant aquesta equació veiem que té tres solucions, una en cada interval $(-\infty,-\mu)$, $(-\mu,1-\mu)$, $(1-\mu,\infty)$.
(donada μ, és fàcil trobar numèricament aquestes solucions).

En el cas (b), l'equació $\dot{P}_X = 0$ s'escriu com $\frac{(1-\mu)\mu}{r_1^3} + \frac{\mu(-1+\mu)}{r_2^3} = 0$, i llavors $r_1 = r_2 = 1$, obtenim així dos punts d'equilibri sobre el pla $Z=0$, que formen triangles equilàters amb els dos cossos primaris: $X = \frac{1}{2} - \mu$, $Y = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tenim per tant 5 punts d'equilibri:



L_1, L_2, L_3 punts d'Euler o colinears

L_4, L_5 punts de Lagrange o equilàterals

Veurem que, si μ és prou petita, els punts L_4 i L_5 tenen tots els exponents característics imaginaris purs i són per tant punts d'equilibri el·líptics.
Concretament, caldrà $\mu < \mu_R = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{23}{27}}\right) \simeq 0.03852$, massa crítica de Routh.

A més, veurem que les freqüències característiques d'aquests punts tenen signes diferents i per tant no es pot aplicar el teorema de Dirichlet per assegurar que són punts d'equilibri estables. Amb tot, es coneix que són "pràcticament" estables en el sentit que és necessari un temps molt gran per allunyar-se'n (estabilitat efectiva, vegeu [GDFGS89, Simó 89]).
De fet es coneixen dos grups d'asteroides situats sobre l'òrbita de Júpiter, anomenats Troians i Grecs, els uns per darrere i els altres per davant de Júpiter, prop dels punts L_4 i L_5.

Pel que es refereix als punts L_1, L_2 i L_3, es pot veure que per a tota $\mu \leq \frac{1}{2}$ tenen alguns exponents característics reals, i per tant són inestables, del tipus sella-centre-centre
(vegeu p.ex. [Jorba99]).

Anem a trobar els exponents característics i les freqüències del punt d'equilibri $L_4=\left(\frac{1}{2}-\mu,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-\mu,\ 0\right)$ (per al punt L_5 es fa igual).

Fem una translació que situa el punt a l'origen,

$$X=x+\tfrac{1}{2}-\mu,\quad Y=y-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad Z=z,\quad P_X=p_x+\tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad P_Y=p_y+\tfrac{1}{2}-\mu,\quad P_Z=p_z,$$

i tenim (llevat d'una constant additiva):

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+yp_x-xp_y-\left(\frac{1}{2}-\mu\right)x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1-\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1^2=\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2,\quad r_2^2=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2$$

Desenvolupant per Taylor trobem els termes de segon ordre:

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+yp_x-xp_y+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{8}y^2+axy+\frac{1}{2}z^2+O_3,$$

$$a=\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)$$

$$\Rightarrow\ D^2H(0)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/4 & a & & & -1 & \\ a & -5/4 & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & 1 & & 1 & & \\ -1 & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)\quad \Rightarrow\ DX_H(0)=JD^2H(0)=\left(\begin{array}{cc:c|cc:c} & 1 & & 1 & & \\ -1 & & & & 1 & \\ \hdashline & & 0 & & & 1 \\ \hline -1/4 & -a & & & 1 & \\ -a & 5/4 & & -1 & & \\ \hdashline & & -1 & & & 0 \end{array}\right)$$

Com veiem, podem desacoblar la matriu $DX_H(0)$ en una matriu provinent de (x,y,p_x,p_y) i una altra provinent de (z,p_z). Aquesta darrera és $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, i dóna lloc als exponents característics $\pm i$, i la freqüència $\omega_3=1>0$.

Per tant ens restringim a la matriu
$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & 1 & \\ -1 & & & 1 \\ \hline -1/4 & -a & & 1 \\ -a & 5/4 & -1 & \end{array}\right).$$

Polinomi característic: $\lambda^4+\lambda^2+\left(\frac{27}{16}-a^2\right)$ $\longrightarrow$ exponents característics:

$$\lambda_1^2,\lambda_2^2=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a^2-\frac{23}{16}}$$

Es comprova fàcilment que $a^2-\frac{23}{16}>0 \Leftrightarrow \underline{\mu<\mu_R}$, i que llavors $\lambda_1^2<-\frac{1}{2}<\lambda_2^2<0$.

$\Rightarrow$ punt d'equilibri <u>el·líptic</u>: $\lambda_1=\pm i\omega_1$, $\lambda_2=\pm i\omega_2$, amb $|\omega_1|>\frac{1}{\sqrt{2}}>|\omega_2|>0$.

(en canvi, per a $\mu>\mu_R$ s'obté una sella complexa)

Per determinar el signe de ω_1, ω_2, hem de mirar els veps.

Notem que ω_1, ω_2 satisfan $\omega_j^4 - \omega_j^2 + \left(\frac{27}{16} - a^2\right) = 0$. Tenint en compte això, podem comprovar que un vep de vap $i\omega_j$ de la matriu B és:

$$V_j = \begin{pmatrix} 2i\omega_j - a \\ -\omega_j^2 - \frac{3}{4} \\ -\omega_j^2 - ai\omega_j + \frac{3}{4} \\ -i\omega_j^3 + \frac{5}{4}i\omega_j - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -\omega_j^2 - \frac{3}{4} \\ -\omega_j^2 + \frac{3}{4} \\ -a \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\omega_j \\ 0 \\ -a\omega_j \\ -\omega_j^3 + \frac{5}{4}\omega_j \end{pmatrix} = V_j^{(1)} + iV_j^{(2)}$$

Calculem:

$$\Omega^0(V_j^{(1)}, V_j^{(2)}) = (V_j^{(1)})^T J V_j^{(2)} = \omega_j\left(\omega_j^4 + \frac{3}{2}\omega_j^2 + a^2 - \frac{39}{16}\right) = \omega_j\left(2\omega_j^4 + \frac{1}{2}\omega_j^2 - \frac{3}{4}\right) = 2\omega_j\left(\omega_j^2 + \frac{3}{4}\right)\left(\omega_j^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Ara veiem:

$\omega_1^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow$ cal escollir $\omega_1 > 0$ per tenir $\Omega^0(V_1^{(1)}, V_1^{(2)}) > 0$

$\omega_2^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$ " " $\omega_2 < 0$ " $\Omega^0(V_2^{(1)}, V_2^{(2)}) > 0$

Així les freqüències característiques tenen signes diferents: $\boxed{\omega_1 > 0,\ \omega_2 < 0,\ \omega_3 > 0}$

- Teoremes KAM i Nekhoroshev

La formulació habitual dels teoremes KAM i Nekhoroshev és per a hamiltonians quasi-integrables, que es suposen donats en variables acció-angle $(\phi, I) = (\phi_1, \dots, \phi_n, I_1, \dots, I_n)$, en un domini de la forma $\mathbb{T}^n \times G \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ (no necessàriament "local").

Donat un hamiltonià quasi-integrable

$$\mathcal{H}(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I), \quad \text{amb } \|f\| = O(\varepsilon)$$

(part integrable + pertorbació),

les equacions hamiltonianes són

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega(I) + \dfrac{\partial f}{\partial I}(\phi, I) \\ \dot{I} = -\dfrac{\partial f}{\partial \phi}(\phi, I) \end{cases}$$

essent $\omega : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$\omega(I) = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I)) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial I_1}(I), \dots, \dfrac{\partial h}{\partial I_n}(I)\right)$, aplicació freqüència.

Si $\varepsilon = 0$, tenim $\dot{I} = 0$ i totes les trajectòries es troben sobre tors invariants n-dimensionals $I = \text{const.}$, i per tant podem dir que les trajectòries són "estables" (és a dir, fitades). El flux sobre cada tor ve donat per l'aplicació freqüència $\omega(I)$.

Si $\varepsilon \neq 0$, resulta $\dot{I} = O(\varepsilon)$ i en principi podem tenir trajectòries de comportament caòtic i inestables.

El teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) ens diu que, sota certes condicions, per a $\varepsilon \neq 0$ prou petit la "majoria" dels tors invariants sobreviuen, amb certa deformació. Per tant, podem parlar d'estabilitat perpètua de la majoria de trajectòries, però no totes.

El teorema de Nekhoroshev estableix, també sota certes condicions, que la variació de les accions $\|I(t) - I(0)\|$ es manté petita durant un temps T exponencialment gran respecte ε:

$$T \sim \exp\left[(1/\varepsilon)^a\right], \quad a > 0 \text{ constant.}$$

Això comporta l'estabilitat efectiva de totes les trajectòries, concepte sovint més útil des del punt de vista pràctic.

Aquests teoremes admeten diverses variants; com a referències generals podeu consultar [Llave 01] per al teorema KAM, i [Giorgilli 03] per al teo. de Nekhoroshev.

- Tornant al cas d'un punt d'equilibri el·líptic, veurem que podem considerar el hamiltonià (1) com a quasi-integrable i donarem un enunciat precís d'ambdós teoremes.

Les variables acció-angle són en aquest cas les polars simplèctiques:

$$q_j = \sqrt{2I_j}\,\sin\phi_j, \quad p_j = \sqrt{2I_j}\,\cos\phi_j, \quad j=1,\dots,n.$$

(de fet aquestes coordenades no estan ben definides en els plans $q_j = p_j = 0$; això comporta algunes dificultats tècniques).

Amb aquest canvi, tenim:

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^0 (q_j^2 + p_j^2) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^0 I_j = \langle \omega^0, I \rangle,$$

sistema de n oscil·ladors harmònics (integrable)

$\to$ totes les trajectòries es troben sobre tors invariants, sempre amb les mateixes freqüències: $\omega^0 = (\omega_1^0, \dots, \omega_n^0)$; el punt crític $x^0 = 0$ és estable per a H_2

$f = H_3 + H_4 + \dots$ pertorbació; en un entorn

$$B_r = \{(x,y) : q_j^2 + p_j^2 \le r^2,\ j=1,\dots,n\} = \{(\phi, I) : 0 \le I_j \le \frac{r^2}{2},\ j=1,\dots,n\},$$

tenim $\|f\| = O(r^3)$ $\leadsto$ podem veure la distància a l'origen com a paràmetre de pertorbació.

Def. Un vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$ és τ,γ-diofàntic ($\tau, \gamma > 0$ donats) si es compleixen les desigualtats

$$|\langle k, \alpha \rangle| \ge \frac{\gamma}{|k|^\tau} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \qquad (2)$$

(notació: $|k| = |k|_1 = |k_1| + \dots + |k_n|$).

És una condició de tipus aritmètic que correspon a demanar que el vector α es troba "prou lluny de ressonàncies".

Es compleix:
- no hi ha vectors α que compleixin (2) amb $\tau < n-1$
- per a $\tau = n-1$, el conjunt dels α que compleixen (2) amb algun $\gamma > 0$ té mesura 0.
- per a $\tau > n-1$, donat $\gamma > 0$, el conjunt dels α que compleixen (2) té mesura relativa $1 - O(\gamma)$, però no conté cap subconjunt obert (és un conjunt de tipus "cantorià")

(vegeu p.ex. [LochakM, ap.4]).

<u>Teorema d'estabilitat efectiva</u> (cas d'un pt. d'equilibri el·líptic)

Suposem que el hamiltonià (1) és analític, i que el vector de freqüències $\omega^0 = (\omega_1^0, \dots, \omega_n^0)$ és τ,γ - diofàntic. Aleshores, si $r \le r_0$, per a tota trajectòria $(q(t), p(t))$ amb $(q(0), p(0)) \in B_{r/2}$ tenim:

$$(q(t), p(t)) \in B_r \quad \text{per a} \quad |t| \le T_r = c_1 \cdot \exp\left[\left(\frac{c_2}{r}\right)^a\right],$$

essent $a = 1/(\tau+1)$, i $r_0, c_1, c_2 > 0$ constants.

(vegeu [GDFGS89] o també [Giorgilli03, §3.2])

Per al teorema KAM, ens caldrà fer una hipòtesi sobre els coeficients de la forma normal de Birkhoff.

<u>Lema</u> (<u>teorema de Birkhoff</u>). Suposem que el vector de freqüències ω^0 és <u>no ressonant fins ordre 4</u>: $\langle k, \omega^0 \rangle \neq 0 \quad \forall\, 0 < |k| \le 4$.
Aleshores, en un entorn de l'origen es pot construir una transformació canònica "<u>propera a la identitat</u>", $(q, p) = \varphi(\tilde{q}, \tilde{p}) = (\tilde{q}, \tilde{p}) + O_2(\tilde{q}, \tilde{p})$, que porta el hamiltonià (1) a un hamiltonià del tipus

$$\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = H \circ \varphi = H_2 + \Gamma_4 + R_5 + R_6 + \cdots \quad \text{(\underline{forma normal de Birkhoff} fins ordre 4)}$$

tal que, en variables acció-angle, tenim:

$$H_2 = H_2(\tilde{I}) = \langle \omega^0, \tilde{I} \rangle, \quad \Gamma_4 = \Gamma_4(\tilde{I}) = \frac{1}{2}\langle Q\tilde{I}, \tilde{I} \rangle, \quad R_m = R_m(\tilde{\varphi}, \tilde{I}),\ m \ge 5.$$

Els coeficients de la matriu Q són uns <u>invariants</u> del hamiltonià original H (no depenen de la transformació φ considerada)

(vegeu [Moser68])

D'aquesta manera, el nou hamiltonià es pot escriure com a "part integrable + pertorbació". D'una altra manera: $\tilde{H} = \Gamma(\tilde{I}) + R(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$, amb $\Gamma(\tilde{I}) = \langle \omega^0, \tilde{I} \rangle + \frac{1}{2}\langle Q\tilde{I}, \tilde{I} \rangle$, $Q = D^2\Gamma(0)$, $R = R_5 + R_6 + \cdots$

[p. ex., per a $n = 2$ i posant $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$,

tindrem $\Gamma(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2) = \omega_1^0 \tilde{I}_1 + \omega_2^0 \tilde{I}_2 + \frac{1}{2}(q_{11}\tilde{I}_1^2 + 2q_{12}\tilde{I}_1\tilde{I}_2 + q_{22}\tilde{I}_2^2)$]

Per a la part integrable Γ, totes les trajectòries es troben sobre tors invariants $\tilde{I} = \text{const.}$, amb freqüències que depenen del tor: $\tilde{\omega}(\tilde{I}) = \omega^0 + Q\tilde{I}$.

Suposarem una de les condicions:

- no degeneració ordinària: $\det Q \neq 0$ (3)
- no degeneració isoenergètica: $\det \begin{pmatrix} Q & \omega^0 \\ (\omega^0)^T & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ (4)

La condició (3) correspon a demanar que l'aplicació freqüència $\tilde{\omega}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és un difeomorfisme local prop de $\tilde{I}=0$ (i per tant, tors diferents tenen freqüències diferents). La condició (4) ens diu que sobre cada nivell d'energia $\Gamma^{-1}(e)$ amb e petit, l'aplicació $\Omega: \Gamma^{-1}(e) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definida per
$\Omega(\tilde{I}) = \left(\frac{\tilde{\omega}_1(\tilde{I})}{\tilde{\omega}_n(\tilde{I})}, \dots, \frac{\tilde{\omega}_{n-1}(\tilde{I})}{\tilde{\omega}_n(\tilde{I})} \right)$ és un difeo. local (sobre cada nivell d'energia, tors diferents tenen freqüències no proporcionals).

Teorema KAM (cas d'un punt d'equilibri el·líptic)

Suposem que el hamiltonià (1) és prou diferenciable, que el vector de freqüències ω^0 és no ressonant fins ordre $K \geq 4$ (és a dir, $\langle k, \omega^0 \rangle \neq 0 \ \forall 0 < |k| \leq K$) i que la forma normal de Birkhoff de H satisfà una de les condicions de no degeneració (3) o (4). Aleshores, si r és prou petit, en l'entorn B_r existeix un gran nombre de tors invariants n-dimensionals, els quals omplen un conjunt $\mathcal{U}_r$, amb

$$\frac{\operatorname{mes}[B_r \setminus \mathcal{U}_r]}{\operatorname{mes} B_r} \leq c \cdot r^{(K-3)/2},$$ on c no depèn de r.

(mesura relativa del conjunt de punts que no es troben sobre tors invariants)

En el cas isoenergètic (4), existeixen tors invariants sobre cada nivell d'energia que intersequi B_r.

(vegeu [Pöschel 82])

Notes

1) Els tors KAM són deformacions de tors $\tilde{I} = \text{const}$ de la forma normal de Birkhoff, tals que les freqüències $\tilde{\omega}(\tilde{I})$ són τ, γ_r-diofàntiques, amb $\gamma_r \longrightarrow 0$ si $r \to 0$.

2) H prou diferenciable: almenys de classe C^p, $p = \max(3n, K+1)$

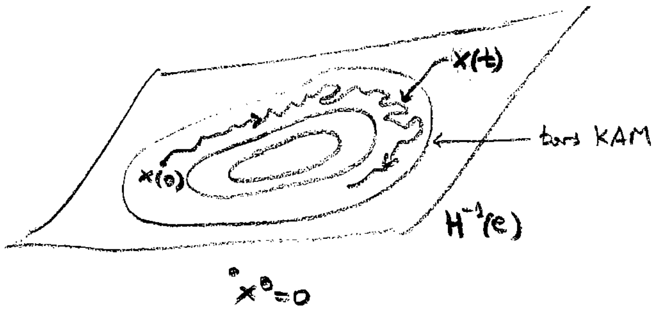
3) r prou petit: $r \leq c_2 \cdot \frac{\alpha_K}{K}$, definint $\alpha_K = \min_{0<|k|\leq K} |\langle k, \omega^0 \rangle|$

(per a $n \geq 2$, tindrem $\alpha_K \to 0$ si $K \to \infty$)

Si ω^0 és no ressonant podem escollir qualsevol K. Però si K és molt gran, l'entorn B_r en el qual podrem aplicar el teorema serà molt petit, si bé tindrem una concentració més gran de tors KAM en aquest entorn.

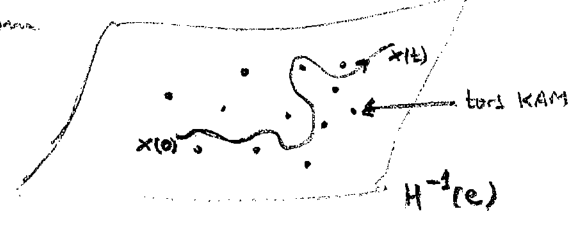
4) Si la pròpia ω^0 satisfà una condició diofàntica, llavors podem escollir $K = K(r)$, i això dóna lloc a una fita exponencialment petita (en r) per a la mesura del conjunt de punts que no es troben sobre tors invariants (vegeu [DG96]).

En el cas $\underline{n=2}$, suposant la condició isoenergètica (4) el teorema KAM ens diu que $x^0=0$ és un punt crític estable. En efecte, sobre cada nivell d'energia $H^{-1}(e)$ (3-dim.) hi ha tors invariants (2-dim.). Com que aquests tors "separen" (tenen codimensió 1) el nivell d'energia, resulta que tota trajectòria propera a l'origen és continguda en un tor invariant o bé es troba sempre entre dos d'ells.



Per a $\underline{n \geq 3}$, també podem aplicar el teorema KAM però en aquest cas no garanteix estabilitat, ja que els tors invariants (n-dim.) "no separen" el nivell d'energia ($(2n-1)$-dim.). Però si hi ha inestabilitat, serà molt lenta, ja que el teorema d'estabilitat efectiva ens dóna fites vàlides per a totes les trajectòries.

Aquest fenomen d'inestabilitat rep el nom de difusió d'Arnold.



Varietats estables, inestables i centrals de punts d'equilibri.

- Donat un camp vectorial X a $\mathbb{R}^n$, considerem el sistema d'EDOs $\dot{x} = X(x)$. Un punt d'equilibri x^0 s'anomena hiperbòlic si tots els vaps de $DX(x^0)$ tenen part real $\neq 0$. Amb una translació i un canvi lineal, podem suposar $x^0 = 0$ i $DX(0) = \begin{pmatrix} A_s & \\ & A_u \end{pmatrix}$, on tots els vaps de A_s tenen part real < 0, i tots els de A_u tenen part real > 0. Si aquestes matrius són $d_1 \times d_1$ i $d_2 \times d_2$ respectivament, $d_1 + d_2 = n$, $0 \le d_1 \le n$, posant $x = (x_s, x_u) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ el sistema $\dot{x} = X(x)$ s'escriu com a

$$\begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s + f_1(x_s, x_u), \\ \dot{x}_u = A_u x_u + f_2(x_s, x_u), \end{cases} \qquad (1)$$

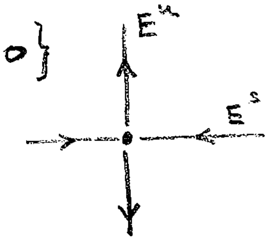
amb $f_1, f_2 = o(\|x\|)$. Suposarem que f_1, f_2 (i per tant X) són de classe C^r, $r \ge 1$ (de fet, tindrem $f_1, f_2 = O(\|x\|^2)$ si $r \ge 2$).

- El sistema linealitzat en $x^0 = 0$ és $\begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s \\ \dot{x}_u = A_u x_u \end{cases}$ (2).

Per al flux d'aquest sistema, els subspais $E^s = \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$, $E^u = \{0\} \times \mathbb{R}^{d_2}$ són invariants, i tenim:

$$E^s = \{x : \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{(0)}(x) = 0\}, \quad E^u = \{x : \lim_{t\to -\infty} \varphi_t^{(0)}(x) = 0\}$$

(subspais estable i inestable),



on $\varphi_t^{(0)}$ denota el flux associat al sistema linealitzat (2) (recordem: $\varphi_t^{(0)}(x)$ és la solució de (2) que compleix $\varphi_0^{(0)}(x) = x$).

De fet, les solucions sobre E^s, E^u tendeixen cap al 0 amb fites exponencials, del tipus

$$\begin{bmatrix} |\varphi_t^{(0)}(x)| \le c\, e^{-\alpha t} |x| & \forall x \in E^s, \forall t \ge 0, \\ |\varphi_t^{(0)}(x)| \le c\, e^{\alpha t} |x| & \forall x \in E^u, \forall t \le 0, \end{bmatrix} \qquad (3)$$

essent $\alpha > 0$ tal que $\operatorname{Re} \lambda_1 < -\alpha$ per a tot vap λ_1 de A_s,

$\operatorname{Re} \lambda_2 > \alpha$ per a tot vap λ_2 de A_u.

• Per al sistema no lineal (1), donat un entorn $\mathcal{U} \ni 0$ podem definir els conjunts següents, que anomenem les varietats estable i inestable locals:

$$W^s_{loc} = W^s_{loc}(\mathcal{U}) = \{x : \varphi_t(x) \text{ prolongable a } \infty,\ \varphi_t(x)\in\mathcal{U}\ \forall t\ge 0,\ \lim_{t\to\infty}\varphi_t(x)=0\}$$

$$W^u_{loc} = W^u_{loc}(\mathcal{U}) = \{x : \varphi_t(x) \text{ prolongable a } -\infty,\ \varphi_t(x)\in\mathcal{U}\ \forall t\le 0,\ \lim_{t\to-\infty}\varphi_t(x)=0\}, \quad (4)$$

on φ_t denota el flux associat al sistema no lineal (2).

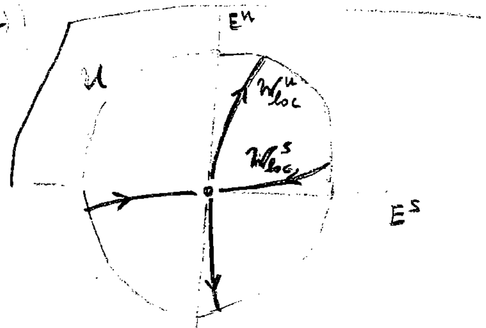
Teorema (varietats estable i inestable, vegeu [ChowH, §3.6]).

Si l'entorn $\mathcal{U}$ és prou petit, els conjunts $W^s_{loc}(\mathcal{U})$, $W^u_{loc}(\mathcal{U})$ són subvarietats de $\mathbb{R}^n$, de dim. d_1 i d_2, invariants pel flux de (1) i tangents en el 0 a E^s, E^u respectivament. Si f_1, f_2 són C^r (analítiques), llavors les subvarietats $W^{s,u}_{loc}$ són C^r (analítiques). A més, per a les solucions sobre $W^{s,u}_{loc}$ tenim fites exponencials:

$$|\varphi_t(x)| \le c\, e^{-\alpha t}|x| \quad \forall x\in W^s_{loc},\ \forall t\ge 0,$$
$$|\varphi_t(x)| \le c\, e^{\alpha t}|x| \quad \forall x\in W^u_{loc},\ \forall t\le 0. \quad (5)$$

(essent $\alpha>0$ una mica més petit que a (3)).

Les solucions $\varphi_t(x)$ amb $x\in W^s_{loc}$ o $x\in W^u_{loc}$ són les úniques contingudes a $\mathcal{U}$ per a tot $t\ge 0$ o $t\le 0$, respectivament.



Així, localment podem veure aquestes varietats com a gràfiques de funcions:

W^s_{loc} ve parametritzada per $x_u = g^s(x_s)$,

W^u_{loc} " " $x_s = g^u(x_u)$,

les funcions g^s, g^u són úniques i compleixen: $g^s(0)=0$, $Dg^s(0)=0$,
$g^u(0)=0$, $Dg^u(0)=0$.

• Per exemple amb W^s_{loc}, la dinàmica interna (flux) sobre la varietat ve donada, si coneixem la funció g^s, pel sistema d'EDOs $\boxed{\dot x_s = A_s x_s + f_1(x_s, g^s(x_s))}$ (d_1-dim.)

Podem determinar el desenvolupament de Taylor $g^s(x_s) = g^s_2 + g^s_3 + \cdots = \sum_{m\ge 2} g^s_m$ imposant que W^s_{loc} és (localment) invariant pel flux: $\dot x_u = Dg^s(x_s)\,\dot x_s$.

Llavors,

$$\boxed{A_u\, g^s(x_s) + f_2(x_s, g^s(x_s)) = Dg^s(x_s)\,(A_s x_s + f_1(x_s, g^s(x_s)))} \quad (6)$$

(EDP per a $g^s(x_s)$)

Podem resoldre (6) per recurrència, fins a l'ordre que vulguem:
si ja coneixem $g_2^s, \dots, g_{m-1}^s$, per determinar g_m^s igualem els termes de grau m a (6),

$$Dg_m^s(x_s)\, A_s x_s - A_u\, g_m^s(x_s) = \Big[\underbrace{f_2(x_s, g^s(x_s)) - Dg^s(x_s)\, f_1(x_s, g^s(x_s))}_{\text{ja conegut}}\Big]_m,$$

i podem trobar $g_m^s(x_s)$ igualant coeficients.
Suposem per simplificar que les matrius són diagonals:

$$A_s = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{d_1} \end{pmatrix}, \quad A_u = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{d_2} \end{pmatrix} \quad \text{(de fet, no és necessari)}$$

Escrivint $g_m^s(x_s) = \sum_{k_1+\dots+k_{d_1}=m} g^s_{k_1\dots k_{d_1}} x_1^{k_1}\cdots x_{d_1}^{k_{d_1}}$,

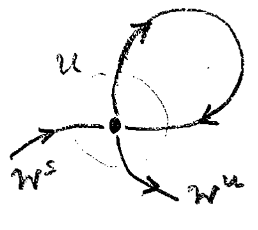
amb $g^s_{k_1\dots k_{d_1}} = \left(g^s_{k_1\dots k_{d_1},1}, \dots, g^s_{k_1\dots k_{d_1},d_2}\right)$ (els coeficients són vectors de $\mathbb{R}^{d_2}$),

podem determinar cada $g^s_{k_1\dots k_{d_1},j}$, havent de dividir una expressió ja coneguda per: $k_1\lambda_1 + \dots + k_{d_1}\lambda_{d_1} - \mu_j \neq 0$, ja que $\operatorname{Re}\lambda_\ell < 0 < \operatorname{Re}\mu_j$.
(per a més detalls, vegeu [Simó 90]).

- A partir de l'entorn $\mathcal{U}$ que ens dóna el teorema anterior, podem prolongar les varietats estable i inestable locals. Així obtindrem les varietats estable i inestable globals:

$$W^s = \bigcup_{t\le 0} \varphi_t(W^s_{loc}), \quad W^u = \bigcup_{t\ge 0} \varphi_t(W^u_{loc}),$$

però aquestes poden no ser subvarietats i s'han de considerar com a "varietats immerses" (embedded manifolds).



- A més d'establir l'existència de les varietats estable i inestable i descriure el comportament de les trajectòries sobre aquestes varietats, en el cas d'un punt hiperbòlic és possible linealitzar el sistema en tot un entorn mitjançant una conjugació topològica

Teorema de Hartman-Grobman ([ChowH, §3.7])
Els sistemes (1) i (2) són topològicament conjugats en un entorn del 0, és a dir, $\exists$ un homeomorfisme $h: \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2$, essent $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ entorns del 0, tal que $h(\varphi_t(x)) = \varphi_t^{(0)}(h(x))$, $\forall t, x$ tals que $\varphi_t(x) \in \mathcal{U}_1$.

Així, les trajectòries del sistema (1) i la seva linealització (2) venen relacionades a través de h. En general, l'aplicació h no serà un difeomorfisme i no podrem parlar pròpiament de "canvi de coordenades".

- Considerem ara un sistema $\dot{x} = X(x)$, amb l'origen com a punt d'equilibri no hiperbòlic, és a dir, que $DX(0)$ també té vaps amb part real $= 0$.

Podem suposar que
$$DX(0) = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & & \\ & B_s & \\ & & B_u \end{pmatrix},$$
on tots els vaps de A, B_s, B_u tenen part real $=0$, <0 i >0, respectivament. Si aquestes matrius són $d\times d$, $d_1 \times d_1$ i $d_2 \times d_2$ resp., $d + d_1 + d_2 = n$, reescrivint $x \in \mathbb{R}^n$ com a $(x, y) = (x, y_s, y_u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ el sistema esdevé:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y_s, y_u) \\ \dot{y}_s = B_s y_s + g_1(x, y_s, y_u) \\ \dot{y}_u = B_u y_u + g_2(x, y_s, y_u) \end{cases} \quad (7)$$

Suposarem f, g_1, g_2 de classe C^r, $r \geq 2$; així tenim $f, g_1, g_2 = O(|(x,y)|^2)$.

- De manera anàloga al cas d'un punt d'equilibri hiperbòlic, es pot provar que existeixen varietats invariants W^s_{loc}, W^u_{loc}, de dimensions d_1, d_2, tangents en el 0 als subspais $E^s = \{0\} \times \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$, $E^u = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Però en aquest cas, les varietats $W^{s,u}_{loc}$ (que són úniques) venen caracteritzades perquè les solucions que contenen satisfan fites exponencials (5), i no per (4), ja que poden existir altres solucions asimptòtiques al 0 per a $t \to \infty$ o $t \to -\infty$, no contingudes en $W^{s,u}_{loc}$. Les varietats $W^{s,u}_{loc}$ s'anomenen varietats (fortament) estable i (fortament) inestable (locals). Notem que (5) també es pot caracteritzar per: $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln|\varphi_t(x)|}{t} < 0$ i semblant amb $t \to -\infty$. Si f, g_1, g_2 són C^r (analítiques), llavors $W^{s,u}_{loc}$ també són C^r (analítiques) (vegeu: [ChowH, §9.2], [CoddingtonL, §13.4]).

- Mirarem ara d'associar una altra varietat invariant als vaps amb part real $= 0$.

Def Una varietat central (local) del sistema (7) és una subvarietat W^c_{loc}, de dimensió d, invariant pel flux de (7) i tangent en el 0 al subspai $E^c = \mathbb{R}^d \times \{0\} \times \{0\}$.

Així, podrem veure una varietat central W^c_{loc} com a gràfica d'una funció: $y = h(x)$, i tindrem: $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$.

Llavors, la dinàmica interna sobre W^c_{loc} ve donada pel sistema d'EDOs $\boxed{\dot{x} = Ax + f(x, h(x))}$

Perquè W^c_{loc} sigui (localment) invariant pel flux, s'ha de complir $\dot y = Dh(x)\dot x$, i per tant la funció $h(x)$, si $\exists$, ha de complir l'EDP

$$\boxed{Bh(x) + g(x,h(x)) = Dh(x)\cdot(Ax + f(x,h(x)))} \qquad (8)$$

De manera anàloga a (6), podem determinar el desenvolupament de Taylor $h(x) = h_2 + h_3 + \dots = \sum_{m\geq 2} h_m$ per recurrència, i es comprova que podem anar trobant els $h_m(x)$ de manera única.

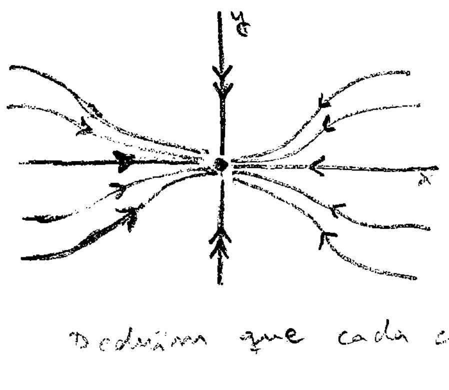
Teorema (varietat central). En un entorn $\mathcal{U} \ni 0$ prou petit, el sistema (7) té una varietat central W^c_{loc}. Si f, g són C^r, llavors W^c_{loc} és C^r. (vegeu [Carr], [ChowH, §9.2])

Notes:

* En general, la varietat central W^c_{loc} no és única (vegeu exemple).
* Només una de les varietats centrals W^c_{loc} pot ser analítica (el desenv. de Taylor de $h(x)$ a (8) es determina únicament)
* Si f, g són analítiques, pot no existir cap varietat central analítica, ni C^∞ (probl. 2.23 i 2.24). En canvi, sí que existirà una varietat central $y = h^{(r)}(x)$, de classe C^r, amb r tan gran com vulguem (l'entorn on estarà definida dependrà de r).

Com veurem, cap d'aquestes observacions no contradiu el fet que a (8) puguem determinar els termes $h_m(x)$ fins a l'ordre que vulguem, de manera única.

Exemple.
$$\begin{cases} \dot x = -x^3 \\ \dot y = -y \end{cases} \longrightarrow \text{les solucions són: } \begin{cases} x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt{1+2t x_0^2}} \\ y(t) = e^{-t} y_0 \end{cases}$$



òrbites: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^3} \rightsquigarrow y = c\cdot e^{-1/2x^2}$, i també $x = 0$.

Deduïm que cada corba
$$y = h_{a,b}(x) = \begin{cases} a e^{-1/2x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ b e^{-1/2x^2}, & x < 0 \end{cases}$$
és varietat central, essent a, b qualssevol (però només és analítica per a $a = b = 0$)

- Ara ens proposem d'estudiar el comportament de les trajectòries en un entorn de la varietat central del sistema (7).

<u>Def.</u> Una <u>varietat central-estable</u> (local) del sistema (7) és una subvarietat $\mathcal{W}^{cs}_{loc}$, de dim $d+d_1$, invariant pel flux de (7) i tangent en el 0 al subespai $E^{cs} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$. Anàlogament, una <u>varietat central-inestable</u> $\mathcal{W}^{cu}_{loc}$, de dim $d+d_2$, ha de ser tangent a $E^{cu} = \mathbb{R}^d \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Podem veure aquestes varietats com a gràfiques,

$$\mathcal{W}^{cs}_{loc}: \ y_u = h^{cs}(x, y_s), \qquad \mathcal{W}^{cu}_{loc}: \ y_s = h^{cu}(x, y_s).$$

<u>Teorema</u> En un entorn $\mathcal{U} \ni 0$ prou petit, el sistema (7) té varietats central-estable $\mathcal{W}^{cs}_{loc}$ i central-inestable $\mathcal{W}^{cu}_{loc}$. Si f, g_1, g_2 són C^r, llavors $\mathcal{W}^{cs}_{loc}$ i $\mathcal{W}^{cu}_{loc}$ són C^r.
(vegeu [ChowH, §9.2], [Kelley67], [HirschPS])

Localment, $\mathcal{W}^{cs}_{loc} \cap \mathcal{W}^{cu}_{loc}$ serà una varietat central $\mathcal{W}^{c}_{loc}$. En general, les varietats central-estable i central-inestable no són úniques.

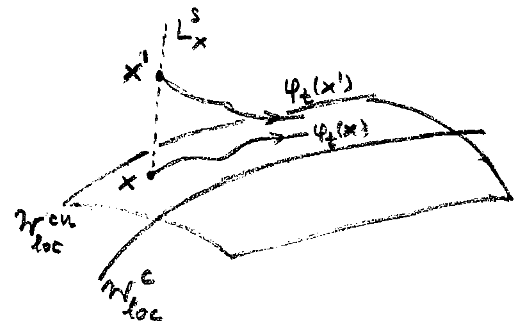
<u>Exemple</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y}_s = -y_s \\ \dot{y}_u = y_u \end{cases} \longrightarrow \quad \mathcal{W}^{cs}_{loc}: \ y_u = 0$$

$\mathcal{W}^{cu}_{loc}$: $y_s = h_{a,b}(x)$, com a l'exemple anterior.
(2-dim.)

- En un entorn de l'origen, podem considerar foliacions de les varietats $\mathcal{W}^{cs}_{loc}$, $\mathcal{W}^{cu}_{loc}$, cadascuna de les quals omple tot l'entorn (vegeu [ChowH, §3.6 i 9.2])
Així, per a cada $x \in \mathcal{W}^{cu}_{loc}$ podem considerar la <u>fulla estable</u> L^s_x, definida per

(9) $\qquad L^s_x = \{x' : |\varphi_t(x') - \varphi_t(x)| \leq c\, e^{-\alpha t} \ \forall t \geq 0\}$



essent α fixat, $0 < \alpha < |\mathrm{Re}\,\lambda|$ per a tot vap λ de B.
Es pot provar que L^s_x és una subvarietat, de dim. d_1, transversal a $\mathcal{W}^{cu}_{loc}$ en el punt x.
Notem però que L^s_x <u>no</u> és invariant, ja que per a $x' \in L^s_x$ la trajectòria $\varphi_t(x')$ no està continguda en L^s_x.
Per la transversalitat esmentada, $\bigcup_{x \in \mathcal{W}^{cu}_{loc}} L^s_x$ omple tot un entorn del 0.

De manera semblant, per a cada $x \in \mathcal{W}^{cs}_{loc}$ podem considerar la <u>fulla inestable</u> L^u_x.

<u>Corol·lari</u> De l'existència de les foliacions estable i inestable es dedueix que tot punt d'equilibri i tota òrbita periòdica propers a l'origen, han d'estar continguts a $\mathcal{W}^{cs}_{loc} \cap \mathcal{W}^{cu}_{loc} = \mathcal{W}^{c}_{loc}$ (ja que no poden pertànyer a $L^x_s \setminus \{x\}$, $L^x_u \setminus \{x\}$).

Així doncs, malgrat que la varietat central $\mathcal{W}^c_{loc}$ no és única, hi ha punts que pertanyen a totes les varietats centrals, com els punts d'equilibri i les òrbites periòdiques propers a l'origen, i també altres conjunts invariants "recurrents", com els tors invariants.

- Tot punt $x \in \mathcal{W}^*_{loc}$ tindrà les dues fulles estable i inestable L^s_x, L^u_x, les quals estaran contingudes en $\mathcal{W}^{cs}_{loc}$ i $\mathcal{W}^{cu}_{loc}$ respectivament.
  De fet, $\bigcup_{x \in \mathcal{W}^c_{loc}} L^s_x = \mathcal{W}^{cs}_{loc}$ $\quad \bigcup_{x \in \mathcal{W}^c_{loc}} L^u_x = \mathcal{W}^{cu}_{loc}$.

  A més, per a l'espai de vectors tangents en x tenim la descomposició $T_x \mathcal{W}^c_{loc} \oplus E^s_x \oplus E^u_x$, essent $E^{s,u}_x = T_x L^{s,u}_x$. La matriu $DX(x)$ deixa invariants aquests 3 subspais, $DX(x)|_{E^s_x}$ té tots els vaps amb $\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha$, i $DX(x)|_{E^u_x}$ té tots els vaps amb $\mathrm{Re}\,\lambda > \alpha$ (això té relació amb (9)).
  Llavors, es diu que $\mathcal{W}^c_{loc}$ és una varietat normalment hiperbòlica.

- Finalment, comentem que les nocions de varietat estable, inestable, central, central-estable i central-inestable, relatives a un punt d'equilibri, es poden generalitzar al cas d'una òrbita periòdica (considerant una aplicació de Poincaré, i usant la noció anàloga d'aquestes varietats per a punts fixos de difeomorfismes).

Teorema KAM sobre una varietat central.

- Considerem un hamiltonià H a $\mathbb{R}^{2n}$ (n g.d.l.), amb l'origen com a punt d'equilibri. Suposem que els exponents característics són de la forma $\pm i\omega_1^0, \dots, \pm i\omega_{n-1}^0, \pm\lambda^0$, tots simples. Llavors, desenvolupant

$$H(x) = H(q,p) = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots, \qquad (1)$$

podem suposar que

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \omega_j^0 (q_j^2 + p_j^2) + \lambda^0 q_n p_n. \qquad (2)$$

El sistema $\dot{x} = X_H(x)$ s'escriu

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dot{q}_j = \omega_j^0 p_j + O_2 \\ \dot{p}_j = -\omega_j^0 q_j + O_2 \end{array}\right] \quad j=1,\dots,n-1 \\ \dot{q}_n = \lambda_n^0 q_n + O_2 \\ \dot{p}_n = -\lambda_n^0 p_n + O_2 \end{array}\right. \qquad (3)$$

i la part lineal, donada per H_2 consisteix en $n-1$ centres i 1 sella.

[Exemple: punts L_1, L_2, L_3 del Problema Restringit de Tres Cossos, que són del tipus centre-centre-sella.]

- En un entorn del 0, el sistema no lineal (3) té varietats invariants:
  - * W^s_{loc}, W^u_{loc} (varietats estable i inestable), 1-dim., que són corbes tangents en el 0 als eixos p_n i q_n respectivament.
  - * W^c_{loc} (varietat central), $(2n-2)$-dim., tangent en el 0 al pla $q_n = p_n = 0$; es pot parametritzar per $(q_n, p_n) = h(q_1, p_1, \dots, q_{n-1}, p_{n-1})$.
  - * W^{cs}_{loc}, W^{cu}_{loc} (varietats central-estable i central-inestable), $(2n-1)$-dim., tangents en el 0 als hiperplans $q_n = 0$ i $p_n = 0$ resp., i es poden parametritzar per $q_n = h^{cs}(q_1, p_1, \dots, q_{n-1}, p_{n-1}, p_n)$, $p_n = h^{cu}(q_1, p_1, \dots, q_{n-1}, p_{n-1}, q_n)$, funcions O_2.

Observem que W^c_{loc} és una subvarietat simplèctica a $\mathbb{R}^{2n}$, ja que la forma simplèctica Ω^0 és no degenerada sobre $T_0 W^c_{loc} = \{(q,p) : q_n = p_n = 0\}$, i per tant també en un entorn. Això ens diu que la restricció de H sobre W^c_{loc} també ens dóna un sistema hamiltonià. Ara bé, les coordenades $(q_1, p_1, \dots, q_{n-1}, p_{n-1})$ en les quals hem parametritzat W^c_{loc} no són, en general, coordenades canòniques. Però pel teorema de Darboux, en un entorn del 0 existeixen coordenades canòniques $(Q_1, P_1, \dots, Q_{n-1}, P_{n-1})$ sobre W^c_{loc}. Com que $H|_{W^c_{loc}}$ té el 0 com a punt d'equilibri el·líptic, podem agafar aquestes coordenades de manera que el desenvolupament

$$H|_{W^c_{loc}} = H^c(Q_1, P_1, \ldots, Q_{n-1}, P_{n-1}) = H_2^c + H_3^c + H_4^c + \cdots, \quad (4)$$

comenci amb

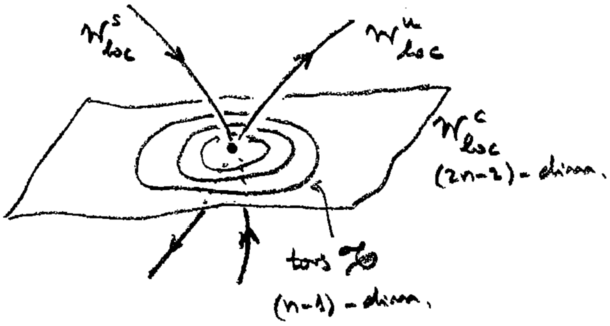
$$H_2^c = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \omega_j^0 (Q_j^2 + P_j^2). \qquad (5)$$

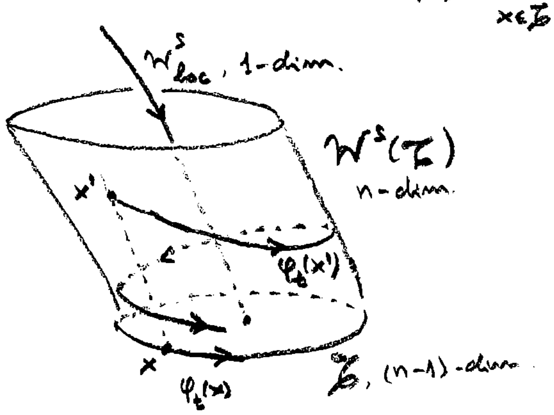
- Sota condicions adequades, podrem aplicar el teorema KAM al hamiltonià H^c i obtenir tors invariants $(n-1)$-dim. continguts en W^c_{loc}: caldrà que el vector $\omega^0 = (\omega_1^0, \ldots, \omega_{n-1}^0)$ sigui no ressonant fins a cert ordre K, i que es complexi una de les condicions de no degeneració (ordinària o isoenergètica).

  (També cal que H^c sigui de classe C^r, amb r prou gran (en funció de n i K); si el hamiltonià original H és C^∞ llavors la varietat central W^c_{loc} és C^r amb r tan gran com vulguem si ens restringim a un entorn prou petit, i el hamiltonià restringit H^c també serà C^r.)

Així, pel teorema KAM tenim un gran nombre de tors invariants $(n-1)$-dimensionals sobre W^c_{loc}. Aquests tors invariants són de tipus hiperbòlic: cada tor $\mathcal{T}$ porta associades varietats invariants n-dim. estable i inestable, $W^s(\mathcal{T})$ i $W^u(\mathcal{T})$, contingudes en W^{cs} i W^{cu} respectivament. Les varietats $W^{s,u}(\mathcal{T})$ s'obtenen com a unió de les fulles estables/inestables dels punts del tor:

$$W^{s,u}(\mathcal{T}) = \bigcup_{x\in\mathcal{T}} L_x^{s,u}.$$





Tot i que la varietat central W^c_{loc} no és única, els tors invariants $\mathcal{T}$ estan continguts en qualsevol varietat central (és a dir, dues varietats centrals només poden ser diferents fora dels tors invariants). De la mateixa manera, W^{cs}_{loc} i W^{cu}_{loc} no són úniques però contenen totes les $W^s(\mathcal{T})$, $W^u(\mathcal{T})$.

Aquests resultats són vàlids si partim de $n-d$ centres i d selles, $d \geq 1$, és a dir, amb uns exponents característics $\pm i\omega_1^0, \ldots, \pm i\omega_{n-d}^0, \pm\lambda_1^0, \ldots, \pm\lambda_d^0$.