VARIETATS SIMPLÈCTIQUES I APLICACIONS CANÒNIQUES.

Tot el formalisme hamiltonià es desenvolupa de manera natural sobre varietats simplèctiques.

- **Def** Una <u>varietat **simplèctica**</u> (M,ω) consisteix en
  M varietat diferenciable de dim. $2n$.
  ω 2-forma diferencial no degenerada i tancada.

Això vol dir que $\forall p \in M$, tenim definida una forma simplèctica $\omega(p): T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ (bilineal, alternada i no degenerada) tal que la seva diferencial exterior s'anul·la: $d\omega = 0$.

- Vegem com s'expressa en coordenades. Donada una carta local $(\mathcal{U},\varphi)$, és a dir $\varphi: \underset{\text{obert}}{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset M$ injectiva, en cada punt

$p = \varphi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathcal{U}$, podem escriure

$$(*) \qquad \omega(p) = \sum_{1 \le i < j \le 2n} \omega_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j \,, \qquad \begin{array}{l} \omega_{ij}: \mathcal{U} \to \mathbb{R} \\ \det(\omega_{ij}(x)) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{U} \end{array}$$

Aquí hem d'interpretar les coordenades x_j com a funcions $x_j: \varphi(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Llavors cada dx_j és una 1-forma definida en cada punt $p = \varphi(x)$ per:

$$dx_j(p)\, v = v_j \,, \quad \text{essent} \quad v = \sum_{j=1}^{2n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}$: vector tangent a la corba $\varphi(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_{2n})$ en $t=0$.

Les dx_j formen, per a cada p, una base de l'espai dual T_p^*M, és a dir, l'espai de les 1-formes sobre T_pM.

Definim $(dx_i \wedge dx_j)(p)(u,v) = \begin{vmatrix} dx_i(p)\cdot u & dx_i(p)\cdot v \\ dx_j(p)\cdot u & dx_j(p)\cdot v \end{vmatrix} = u_i v_j - u_j v_i$

Les $dx_i \wedge dx_j$ formen, per a cada p, una base de l'espai $\Lambda^2 T_p^* M$ de les 2-formes sobre T_pM. L'expressió $(*)$ ens dóna $\omega(p)$ escrita en aquesta base.

Vegem ara què ens diu en coordenades la condició $d\omega = 0$.
Per a una funció escalar f (una 0-forma), que escriurem directament $f(x)$ sobre l'entorn $\varphi(\mathcal{U})$ (en realitat hauríem de considerar $f \circ \varphi$), definim la 1-forma df per

$$df(x)\; v = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, v_j \qquad \text{(derivada direccional)}$$

Així podem escriure $\displaystyle df = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \,.$

Aplicant el formalisme de la diferencial exterior,

$$d\omega = \sum_{i<j} d\omega_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j = \sum_{i<j} \Big(\sum_k \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k \Big) \wedge \underbrace{dx_i \wedge dx_j}_{dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k} =$$

$$= \sum_{i<j<k} + \sum_{\substack{i<k<j \\ \downarrow\downarrow \\ j\ k}} + \sum_{\substack{k<i<j \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ i\ j\ k}} = \sum_{i<j<k} \Big(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i} \Big) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

Per tant, ω tancada $\iff$ $\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \omega_{ki}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_i} \equiv 0 \quad \forall x, \forall i, j, k$

- Recordem que una k-forma α és tancada si $d\alpha = 0$, i és exacta si $\exists$ una $(k-1)$-forma β tal que $\alpha = d\beta$.
  Tota k-forma exacta és tancada (ja que $d(d\beta) = 0$); i tota k-forma tancada és localment exacta (lema de Poincaré)

  En el cas de la forma simplèctica ω, com que $d\omega = 0$ deduïm que $\forall x \in M$, $\exists$ un entorn $\mathcal{U} \ni x$ t.q. $\omega = d\theta$ per alguna 1-forma θ.

  Per exemple, si $\omega = \Omega^0 = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j$, podem prendre $\theta = -\sum_{j=1}^n p_j \, dq_j$.

Aplicacions canòniques.

- Def. Si (M, ω), (N, η) són varietats simplèctiques, una aplicació $f: M \to N$ tal que $f^*\eta = \omega$ (és a dir, $\omega(p)(u,v) = \eta(f(p))(Df(p)u, Df(p)v)$) s'anomena una aplicació canònica o simplèctica. Si és un difeo, s'anomena simplectomorfisme (localment sempre ho serà).

  En coordenades, escrivint $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} \, dx_i \wedge dx_j$, $\eta = \sum_{i<j} \eta_{ij} \, dy_i \wedge dy_j$, l'aplicació $f = (f_1, \ldots, f_{2n})$ és canònica si $\sum_{i<j} (\eta_{ij} \circ f) \, df_i \wedge df_j = \sum_{i<j} \omega_{ij} \, dx_i \wedge dx_j$.
- Usant que $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$, es dedueix que

  $f^*(\eta \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge \eta) = \omega \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge \omega$, i per tant tota aplicació canònica conserva volum (i orientació), vegeu problema 2.9.

  De fet, això també és conseqüència del fet que, en coordenades canòniques, la matriu $Df(x)$ és simplèctica i per tant $\det Df(x) = 1 \quad \forall x$

- També es poden caracteritzar les aplicacions canòniques a partir d'invariants integrals, vegeu [Arnold-MMMC, §38 i 44], [Arnold KN, cap. 1, §3.6], [Abraham M, §3.9]

Camps hamiltonians

- (M,ω) varietat simplèctica.

  $H: M \longrightarrow \mathbb{R}$ funció donada (hamiltonià)

Def. El camp vectorial $X_H = dH^{\#}$ definit per
$$\omega(x)\big(X_H(x),\cdot\big) = dH(x), \quad x \in M$$
s'anomena el camp hamiltonià associat a H.

També s'escriu: $dH = i_{X_H}\omega = \omega \lrcorner X_H$ (producte interior o contracció)

observem que tenim un isomorfisme $T_xM \longrightarrow T_x^*M \quad \forall x$, ja que la forma simplèctica ω és no degenerada.

En coordenades, si ω ve donada per la matriu $R(x)$, tenim
$$X_H(x) = \big(DH(x)\cdot R(x)^{-1}\big)^T = -R(x)^{-1}\,\nabla H(x)$$

- Proposició: El flux φ_t d'un camp hamiltonià X_H és simplèctic: $\varphi_t^*\omega = \omega$.

Prova
$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega) = \varphi_t^*\big(\mathcal{L}_{X_H}\omega\big) = \varphi_t^*\big(d(i_{X_H}\omega) + i_{X_H}(d\omega)\big) = \varphi_t^*\big(d(dH)+0\big) = 0.$$
(ω tancada)

Hem usat la derivada de Lie respecte un camp vectorial i algunes propietats.

Def. Donada una k-forma α i un camp vectorial X, la derivada de Lie de α al llarg de X és la k-forma
$$\mathcal{L}_X\alpha = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\alpha, \quad \text{on } \varphi_t \text{ és el flux associat a } X.$$

Tenim: $$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha = \varphi_t^*(\mathcal{L}_X\alpha)$$
$$\mathcal{L}_X\alpha = d(i_X\alpha) + i_X(d\alpha) \quad \text{(fórmula màgica de Cartan)}$$

El recíproc és fals: hi ha fluxos simplèctics que no provenen d'un camp hamiltonià. Però es pot veure que sí provenen d'un camp X "localment hamiltonià", és a dir, $i_X\omega$ és una 1-forma tancada (en comptes de: $i_X\omega = dH$, exacta). Vegeu p. ex. [Marsden R, §5.4]

Parèntesi de Poisson

- **Def.** Donades F, G funcions sobre una varietat simplèctica (M,ω), el seu parèntesi de Poisson és la funció $\{F,G\} = \omega(X_F, X_G) = dF \cdot X_G$

En unes coordenades $(x_1,\dots,x_{2n})$, si ω ve donada per la matriu $R(x)$, tenim: $\{F,G\}(x) = \nabla F(x)^T(-R(x)^{-1})\nabla G(x)$. Llavors, els coeficients de $-R(x)^{-1}$ són $r_{ij} = \{x_i, x_j\}$.

- **Proposició** Si f és una aplicació simplèctica,
  (a) $f^* X_H = X_{H\circ f}$
  (b) $\{F,G\}\circ f = \{F\circ f, G\circ f\}$

Prova. (a) $(f^* X_H)(x) = Df(x)^{-1} X_H(f(x))$

$$\omega(x)\left(f^*X_H(x), \cdot\right) = \omega(x)\left(Df(x)^{-1} X_H(f(x)), \cdot\right) = \omega(x)\left(X_H(f(x)), Df(x)\,\cdot\right) =$$
$$= dH(f(x))\,Df(x) = d(H\circ f)(x) \Rightarrow f^* X_H(x) = X_{H\circ f}(x)$$

(b) $$\{F\circ f, G\circ f\}(x) = d(F\circ f)(x) X_{G\circ f}(x) = dF(f(x))\cdot Df(x)\cdot (f^* X_G)(x) =$$
$$= dF(f(x))\cdot X_G(f(x)) = \{F,G\}(f(x))$$

- **Proposició** Si φ_t és el flux de X_H, $\frac{d}{dt}(F\circ\varphi_t) = \{F,H\}\circ\varphi_t$. $(*)$

Prova. $$\frac{d}{dt}\left[(F\circ\varphi_t)(x)\right] = dF(\varphi_t(x))\cdot\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = dF(\varphi_t(x))\, X_H(\varphi_t(x)) = \{F,H\}(\varphi_t(x))$$

Notem que, si prenem $t=0$ a la igualtat $(*)$, resulta $\boxed{\mathcal{L}_{X_H} F = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(F\circ\varphi_t) = \{F,H\}}$ $(**)$

Deduïm d'aquesta proposició que F és integral primera de X_H $\Leftrightarrow \{F,H\}\equiv 0$.
Com a cas particular, H sempre és integral primera de X_H (conservació de l'energia)

- **Proposició** $\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = 0$ (identitat de Jacobi)

Prova. Com que el flux φ_t de X_H és simplèctic, $\{F,G\}\circ\varphi_t = \{F\circ\varphi_t, G\circ\varphi_t\}$

Prenem $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ als dos costats:

$$\mathcal{L}_{X_H}\{F,G\}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\{F,G\}(\varphi_t(x))\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[dF(\varphi_t(x))\, X_G(\varphi_t(x))\right] =$$
$$= \left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dF(\varphi_t(x))\right]\cdot X_G(x) + dF(x)\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[X_G(\varphi_t(x))\right] =$$
$$= d(\mathcal{L}_{X_H}F)(x)\cdot X_G(x) + dF(x)\cdot X_{\mathcal{L}_{X_H}G}(x) =$$
$$= \{\mathcal{L}_{X_H}F, G\}(x) + \{F, \mathcal{L}_{X_H}G\}(x),$$

i aplicant $(**)$ obtenim la identitat de Jacobi

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dF(\varphi_t(x)) = d\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\varphi_t(x))\right) = d(\mathcal{L}_{X_H}F)$$

$$\omega(x)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X_G(\varphi_t(x)), \cdot\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dG(\varphi_t(x)) = d(\mathcal{L}_{X_H}G)(x)$$
$$= \omega(x)\left(X_{\mathcal{L}_{X_H}G}(x), \cdot\right)$$

Així doncs, la identitat de Jacobi no és més que la versió infinitesimal del fet que el flux φ_t és simplèctic.

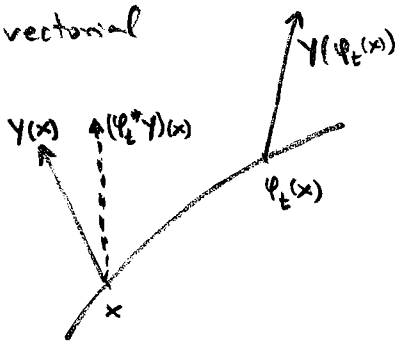
Recordem que per veure que φ_t és simplèctic havíem usat que la forma simplèctica ω és tancada. De fet, desenvolupant la mateixa teoria per a qualsevol 2-forma no degenerada ω, es pot provar que la identitat de Jacobi és vàlida $\iff$ ω és tancada. (vegeu [MarsdenR, §5.5])

Parèntesi de Lie de camps vectorials

• **Def.** Donats camps vectorials X, Y sobre una varietat diferenciable M qualsevol, definim llur parèntesi de Lie com el camp vectorial

$$[X,Y] = \mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^* Y)$$

essent φ_t el flux associat a X.



• En coordenades, el parèntesi de Lie es calcula per la fórmula $\boxed{[X,Y](x) = DY(x)\,X(x) - DX(x)\,Y(x)}$ (1)

En efecte, recordant que $(\varphi_t^* Y)(x) = D\varphi_t(x)^{-1}\cdot Y(\varphi_t(x))$,

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*Y)(x) = -D\varphi_t(x)^{-1}\cdot\frac{d}{dt}D\varphi_t(x)\cdot D\varphi_t(x)^{-1}\cdot Y(\varphi_t(x)) + D\varphi_t(x)^{-1}\cdot DY(\varphi_t(x))\cdot X(\varphi_t(x)) =$$

$$\frac{d}{dt}[A(t)^{-1}] = -A(t)^{-1}\,\frac{dA}{dt}(t)\,A(t)^{-1}$$

$$= D\varphi_t(x)^{-1}\cdot\left[-DX(\varphi_t(x))\,Y(\varphi_t(x)) + DY(\varphi_t(x))\,X(\varphi_t(x))\right],$$ i prenent $t=0$ obtenim (1).

$$\frac{d}{dt}D\varphi_t(x) = D[X(\varphi_t(x))] = DX(\varphi_t(x))\cdot D\varphi_t(x)$$
(eq. variacionals)

De fet, deixant una t qualsevol deduïm:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\varphi_t^*Y) = \varphi_t^*[X,Y]} \quad (2)$$

Aquesta igualtat també es pot obtenir directament de la definició:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*Y) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}(\varphi_{t+\tau}^*Y) = \varphi_t^*\left[\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}(\varphi_\tau^*Y)\right] = \varphi_t^*[X,Y].$$

- La fórmula $\boxed{\mathcal{L}_{[X,Y]}f = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X f}^{(3)}$ constitueix una definició alternativa del parèntesi de Lie, ja que tot camp vectorial X ve determinat unívocament per la derivació de Lie $\mathcal{L}_X$ associada.

  Provem aquesta fórmula a partir de (1):

  $$\mathcal{L}_X f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f\circ\varphi_t)(x) = Df(x)\, X(x), \quad \mathcal{L}_Y f(x) = Df(x)\, Y(x)$$

  $$(\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y f)(x) = D(\mathcal{L}_Y f)(x)\cdot X(x) = D(Df(x)\cdot Y(x))\cdot X(x) =$$
  $$= (Y^T(x)\cdot D^2 f(x) + Df(x)\, DY(x))\cdot X(x).$$

  Calculant també $(\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X f)(x)$ i restant, i utilitzant que $D^2f(x)$ és simètrica, deduïm la fórmula.

- Relacionem el parèntesi de Lie de dos camps vectorials X, Y amb la commutativitat de llurs fluxos respectius φ_t, ψ_s.

  Proposició $[X,Y]=0 \iff \psi_s\circ\varphi_t = \varphi_t\circ\psi_s \quad \forall t,s$ (on estiguin definits)

  Prova. $$[X,Y]=0 \underset{(2)}{\iff} \varphi_t^* Y = Y \quad \forall t \iff \underbrace{\varphi_t^{-1}\circ\psi_s\circ\varphi_t}_{[\text{flux de } \varphi_t^*Y]} = \underbrace{\psi_s}_{[\text{flux de } Y]} \quad \forall t,s.$$

- En el cas de camps hamiltonians, el parèntesi de Lie té una relació molt directa amb el parèntesi de Poisson: donades F, G funcions sobre una varietat simplèctica (M,ω),

  $$\boxed{[X_F, X_G] = -X_{\{F,G\}}}$$

  En efecte: Donada una funció f recordem que $\mathcal{L}_{X_F} f = \{f, F\}$.
  Llavors, aplicant (3) i la identitat de Jacobi,

  $$\mathcal{L}_{[X_F,X_G]} f = \mathcal{L}_{X_F}\mathcal{L}_{X_G} f - \mathcal{L}_{X_G}\mathcal{L}_{X_F} f = \{\{f,G\},F\} - \{\{f,F\},G\} =$$
  $$= -\{\{G,F\},f\} = -\{f,\{F,G\}\} = -\mathcal{L}_{X_{\{F,G\}}} f$$

- Conseqüència. Suposem F, G funcions amb $\{F,G\}\equiv$ const., i suposem que són independents en un punt x^0 (és a dir, $dF(x^0)$ i $dG(x^0)$ linealment independents). Llavors els fluxos φ_t, ψ_s associats als camps hamiltonians X_F, X_G commuten, i l'aplicació $(t,s)\longmapsto \psi_s\circ\varphi_t(x^0)$, amb (t,s) en un entorn de $(0,0)$, omple una superfície (2-dim) de M.
  Si $\{F,G\}\equiv 0$ (F i G en involució), la superfície és continguda a $\{F=c_1, G=c_2\}$ (varietat $(2n-2)$-dim.), ja que F i G són integrals primeres de tots dos camps X_F, X_G.

Teorema de Darboux

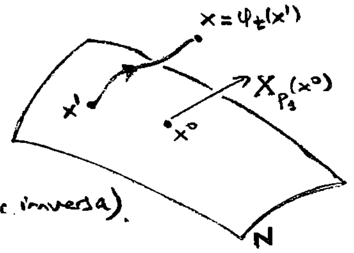
(M,ω) varietat simplèctica de dim. $2n$.
$\forall x^0 \in M$, $\exists$ coordenades $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ en un entorn $\mathcal{U} \ni x^0$, en les quals $\omega = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j$ a tot l'entorn $\mathcal{U}$.

Així doncs, localment sempre podem suposar la forma simplèctica standard Ω^0 (matriu J) passant a aquestes coordenades canòniques o simplèctiques.

Es pot provar aquest teorema directament a partir de la def. de varietat simplèctica (vegeu [KatokH, §5.5] o [MarsdenR, §5.1]). Aquí el provarem usant fluxos de camps hamiltonians ([Arnold-MMMC, §43]).

Prova. Veurem que en un entorn $\mathcal{U} \ni x^0$ existeixen funcions $q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tals que $\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0$, $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$, $\forall i,j = 1,\dots,n$. (Llavors defineixen un canvi de coord.^{s}, i en el nou sistema, la matriu de ω és J.)

Escollim qualsevol funció p_1 tal que $dp_1(x^0) \neq 0$. Podem suposar $p_1(x^0) = 0$. Considerem el camp ham. X_{p_1}, i el flux associat φ_t. Tenim $X_{p_1}(x^0) \neq 0$. Prenem $N \subset M$ hipersuperfície transversal al flux en el punt x^0, és a dir, $X_{p_1}(x^0) \notin T_{x^0}N$.



Llavors, en un entorn de x^0 podem definir una funció q_1:

$$q_1(x) = t, \text{ tal que } x = \varphi_t(x'), \text{ amb } x' \in N.$$

(es comprova que podem invertir $(t,x') \longrightarrow \varphi_t(x')$ pel teo. func. inversa).

En l'entorn considerat, tenim: $\{q_1,p_1\}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} q_1(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(q_1(x)+t) = 1$, $\forall x$.

Així tenim $q_1(x^0) = p_1(x^0) = 0$, i $dq_1(x^0)$, $dp_1(x^0)$ lin. indep. ja que $\omega(X_{q_1}, X_{p_1}) = \{q_1,p_1\} \neq 0$.

Si $n=1$ (M és 2-dim.) el teo. ja està provat.

Si $n \geq 2$, considerem $P = \{q_1 = p_1 = 0\}$, subvarietat $(2n-2)$-dim., que conté x^0. ($P \subset N$)

Provem que $\omega|_P$ és no degenerada, i per tant $(P, \omega|_P)$ és subvarietat simplèctica de (M,ω).

En efecte: Sigui $x \in P$.

$$T_x P = \{ u \in T_x M : \underset{\omega(x)(X_{q_1}(x),u)}{\overset{\shortparallel}{dq_1(x)\cdot u}} = \underset{\omega(x)(X_{p_1}(x),u)}{\overset{\shortparallel}{dp_1(x)\cdot u}} = 0 \}$$

Llavors, $T_x M = \langle X_{q_1}(x), X_{p_1}(x) \rangle \oplus T_x P$, ja que $X_{q_1}(x)$, $X_{p_1}(x)$ lin. indep., i com que $\omega(X_{q_1}(x), X_{p_1}(x)) = 1$, no pertanyen a $T_x P$.

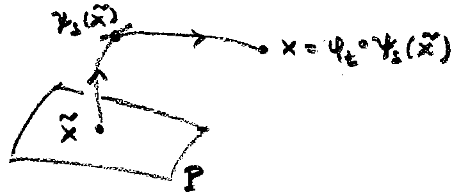
Donat $u \in T_x P$, com que $\omega(x)(u, X_{q_1}(x)) = \omega(x)(u, X_{p_1}(x)) = 0$, per la no degeneració de $\omega(x)$ sobre $T_x M$ resulta que $\exists v \in T_x P : \omega(x)(u,v) \neq 0$.

Suposant per inducció que ja hem provat el teo. per a dim. $2n-2$, en un entorn $V \ni x_0$ dins la subvarietat P existeixen funcions $q_2,\dots,q_n,p_2,\dots,p_n : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0$, $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$ $\forall i,j \geq 2$.

Ara ens cal estendre aquestes funcions de l'entorn $V \subset P$ a un entorn $\mathcal{U} \subset M$.

Com ja hem vist, $X_{q_1}(x^0), X_{p_1}(x^0)$ són lin. indep., i no pertanyen a $T_{x^0}P$.
Llavors, per a tot x en un entorn (dins M) de x^0 existeixen $s, t \in \mathbb{R}$ i $\tilde{x} \in P$ únics, tals que $x = \varphi_t \circ \gamma_s(\tilde{x}) = \gamma_s \circ \varphi_t(\tilde{x})$, essent γ_s, φ_t els fluxos de X_{q_1}, X_{p_1} respectivament.

(cal aplicar el teo. func. inversa a $(s,t,\tilde{x}) \longrightarrow \varphi_t \circ \gamma_s(\tilde{x})$)



En aquest entorn, definim $q_j(x) = q_j(\tilde{x})$, $p_j(x) = p_j(\tilde{x})$, $j = 2, \dots, n$.

Ara només cal comprovar que $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ satisfan els requisits a l'entorn de x^0 en M:

* $\{q_i, q_j\}(x) = \{q_i \circ \varphi_t \circ \gamma_s, q_j \circ \varphi_t \circ \gamma_s\}(\tilde{x}) = \{q_i, q_j\}(\tilde{x}) = 0$, i anàlogament $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\forall i, j \geq 2$, ja que els fluxos γ_s, φ_t són simplèctics.

* Per construcció, q_j, p_j, $j \geq 2$, són integrals primeres de X_{q_1}, X_{p_1} ($q_j(\gamma_s(x)), q_j(\varphi_t(x)), p_j(\gamma_s(x)), p_j(\varphi_t(x))$ constants).
Llavors, $\{q_j, q_1\} = \{q_j, p_1\} = \{p_j, q_1\} = \{p_j, p_1\} \equiv 0$, $\forall j \geq 2$.

* $\{q_1, p_1\} \equiv 1$, com ja sabíem.

• Observem que, en la prova del teo. de Darboux, hem partit d'una funció p_1 qualsevol, amb $dp_1(x^0) \neq 0$. Llavors, podem interpretar-ho com una versió hamiltoniana del teo. de redreçament del flux.

<u>Teorema de redreçament del flux hamiltonià</u> ("<u>Hamiltonian flow-box theorem</u>")
(M, ω) varietat simplèctica. Sigui $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, i $x^0 \in M$ que no sigui un punt crític de H. Aleshores, $\exists$ coordenades simplèctiques $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ en un entorn $\mathcal{U} \ni x^0$, en les quals $H = p_1$. En aquestes coordenades, les equacions hamiltonianes són $\dot{q}_1 = 1$, $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{q}_j = \dot{p}_j = 0$, $j = 2, \dots, n$.

Com que $dH(x^0) \neq 0$, només hem d'aplicar el teo. de Darboux fixant $p_1 = H$.

<u>Corol·lari</u>. En les condicions del teorema anterior, en un entorn $\mathcal{U} \ni x^0$ el sistema hamiltonià donat per H té <u>n integrals primeres</u> $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ <u>independents</u> ($dF_1(x), \dots, dF_n(x)$ lin. indep. $\forall x \in \mathcal{U}$) i <u>en involució</u> ($\{F_i, F_j\} \equiv 0$ sobre $\mathcal{U}$)
Només cal prendre, p. ex., $F_1 = p_1, \dots, F_n = p_n$. Així, sempre $\exists$ n i.p.'s independents i en involució prop de qualsevol punt no crític de H. En canvi, l'existència <u>global</u> de n i.p.'s independents i en involució és molt més restrictiva, implica integrabilitat (teo. de Liouville-Arnold).

Fibrat cotangent com a varietat simplèctica.

- Per a un hamiltonià $H(q,p)$ definit a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega^0)$, sovint les coordenades $q=(q_1,\dots,q_n)$ i $p=(p_1,\dots,p_n)$ s'anomenen posicions i moments respectivament.

Vegem que és natural cada parell (q,p) com una 1-forma de components $p_1,\dots,p_n$ sobre el punt $(q_1,\dots,q_n)$. Per comprovar-ho, considerem un canvi de coordenades que sobre les posicions ve donat per $q=\varphi(\bar{q})$. Admetent que actua de manera lineal sobre els moments, tindrem $(q,p)=f(\bar{q},\bar{p})=(\varphi(\bar{q}),\psi(\bar{q})\bar{p})$. (1)
Perquè el canvi conservi l'estructura de les eq. hamiltonianes, ha de ser simplèctic:

$$Df(\bar{q},\bar{p})^T\, J\, Df(\bar{q},\bar{p}) = J$$

Escrivint

$$Df(\bar{q},\bar{p}) = \begin{pmatrix} D_{\bar{q}}\varphi(\bar{q}) & 0 \\ D_{\bar{q}}(\psi(\bar{q})\bar{p}) & \psi(\bar{q}) \end{pmatrix},$$

resulta: $\boxed{\psi(\bar{q}) = \left(D_{\bar{q}}\varphi(\bar{q})^T\right)^{-1}}$ (2) i $D_{\bar{q}}\varphi(\bar{q})^T \cdot D_{\bar{q}}(\psi(\bar{q})\bar{p})$ simètrica.

De fet, només imposant (2) ja resulta que el canvi és simplèctic, però ho veurem d'una altra manera: comprovarem que $(q,p)=f(\bar{q},\bar{p})$ conserva la 1-forma $\theta = -\sum_{j=1}^{n} p_j\, dq_j$, i per tant és simplèctica, ja que conserva la 2-forma $d\theta = \Omega^0 = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j$ (el recíproc no és cert, vegeu problema 4.10).

En efecte: hem de comprovar que $\theta(\bar{x})\,V = \theta(f(\bar{x}))\cdot Df(\bar{x})\,V$.
Com que la matriu de $\theta(\bar{x})$ és $(\bar{p}^T \;\; 0)$, cal veure:

$$(\bar{p}^T \;\; 0) = (\bar{p}^T\cdot\psi(\bar{q})^T \;\; 0)\begin{pmatrix} D_{\bar{q}}\varphi(\bar{q}) & 0 \\ D_{\bar{q}}(\psi(\bar{q})\bar{p}) & \psi(\bar{q}) \end{pmatrix},$$

la qual cosa és certa sota la condició (2).

Així doncs, el canvi (1) és de la forma

$$\begin{cases} q = \varphi(\bar{q}) \\ p = \left(D_{\bar{q}}\varphi(\bar{q})^T\right)^{-1}\bar{p}, \end{cases}$$

però si mirem els moments $(p_1,\dots,p_n)$ com un "vector fila", resulta:

$\bar{p}^T = p^T \cdot D_{\bar{q}}\varphi(\bar{q})$, que és la regla de transformació d'una 1-forma sobre el punt $q=\varphi(\bar{q})$.

- En general, es consideren les posicions q sobre una varietat diferenciable N de dim. n (<u>varietat de configuracions</u>), i el hamiltonià serà una funció definida sobre el fibrat cotangent de N:

$$T^*N = \bigcup_{q\in N} T_q^*N \quad , \text{ varietat } 2n\text{-dim.}$$

(on cada T_q^*N és l'espai dual o de 1-formes sobre l'espai tangent T_qN.)

Prenent una carta local sobre N, amb coordenades $q=(q_1,\dots,q_n)$, tenim coordenades $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ sobre T^*N, que representen la 1-forma $p_1\,dq_1+\dots+p_n\,dq_n$ sobre T_q^*N.

El fibrat cotangent té estructura de varietat simplèctica, definint-hi a partir d'unes coordenades de N la forma simplèctica $\omega = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j = d\theta$, amb $\theta = -\sum_{j=1}^n p_j\,dq_j$.

Les formes θ i ω no depenen de les coordenades escollides sobre N, ja que fent qualsevol canvi $q=\varphi(\bar q)$, tenim $\bar p^T = p^T\cdot D_{\bar q}\varphi(\bar q)$, és a dir $\bar p_j = \sum_{l=1}^n p_l \dfrac{\partial q_l}{\partial \bar q_j}$, i usant també $dq_j = \sum_{l=1}^n \dfrac{\partial q_j}{\partial \bar q_l}\,d\bar q_l$, deduïm que

$$\sum_{j=1}^n p_j\,dq_j = \sum_{j=1}^n \bar p_j\,d\bar q_j .$$

Sistemes hamiltonians amb simetries

- La presència de simetries en un sistema hamiltonià pot donar una manera fàcil de trobar algunes integrals primeres, especialment quan les simetries es donen a l'espai de configuracions, on són més fàcils de detectar.

Teorema de Noether

H hamiltonià sobre una varietat simplèctica (M,ω). Si H és invariant sota el flux hamiltonià d'una altra funció F (és a dir, si $H\circ\psi_s = H \ \forall s$, essent ψ_s el flux de X_F), aleshores F és una integral primera de H.

En efecte, la hipòtesi diu que $\{H,F\}=0$. Llavors, $\{F,H\}=0$ i per tant F és i.p. de H.

Com a cas particular molt senzill, si $H(q,p)$ no depèn d'una variable q_j, llavors és invariant sota les translacions $(q_1,\dots,q_j,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) \xrightarrow{\psi_s} (q_1,\dots,q_j+s,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$, que constitueixen el flux hamiltonià de $F=p_j$. Llavors, p_j és integral primera.

- Un cas particular interessant es dóna quan $M=T^*N$, i H és invariant sota les transformacions simplèctiques induïdes per una família uniparamètrica de transformacions de N.

Exemple. Partícula sotmesa a un camp central en el pla.

$$H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(\|q\|), \qquad (q,p)=(q_1,q_2,p_1,p_2)$$

Les rotacions $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \longmapsto \varphi_s\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

indueixen rotacions també en els moments:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \longmapsto \left(D\varphi_s\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}^T\right)^{-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

i H és clarament invariant sota aquestes rotacions.

El camp vectorial a l'espai (q,p) que té com a flux aquestes rotacions és $X_F = (-q_2, q_1, -p_2, p_1)$, camp hamiltonià de la funció $F = q_1p_2 - q_2p_1$.

$\Rightarrow$ H té la funció F com a integral primera (moment angular)

Funcions generatrius d'aplicacions simplèctiques.

En l'estudi de sistemes hamiltonians, sovint s'intenta simplificar l'expressió de la funció hamiltoniana H construint una transformació simplèctica φ tal que el nou hamiltonià $H\circ\varphi$ tingui la forma més senzilla possible.

L'obtenció d'una transformació $\varphi: (q,p) \longmapsto (Q,P) = (Q(q,p), P(q,p))$ que sigui simplèctica i que, a més, permeti simplificar l'expressió del nostre hamiltonià, no és una tasca simple, ja que la condició $D\varphi(q,p)^T \cdot J \cdot D\varphi(q,p) = J$ comporta restriccions complicades sobre les $2n$ funcions $Q_j(q,p)$, $P_j(q,p)$, $j=1,\dots,n$. No obstant, veurem que és possible generar transformacions simplèctiques a partir d'una única funció escalar, anomenada funció generatriu.

- El mètode clàssic per obtenir transformacions simplèctiques $(Q,P) = \varphi(q,p)$ utilitza funcions generatrius "de variables mixtes", que poden ser de la forma $S(q,P)$ o d'altres tipus. Com veurem, el mètode no ens donarà φ explícitament, sinó a través d'equacions implícites.

Vegem com obtenir la transformació simplèctica φ a partir d'una funció generatriu, en un entorn d'un punt donat (q^0,p^0).

Si φ és simplèctica, conserva la forma simplèctica:

$$dQ \wedge dP = dq \wedge dp \qquad \left(\text{és a dir, } \sum_{j=1}^n dQ_j \wedge dP_j = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j \right).$$

Deduïm que $p\,dq + Q\,dP$ és una 1-forma tancada i, per tant, aplicant el lema de Poincaré localment serà exacta:

$$p\,dq + Q\,dP = dF, \qquad \text{amb } F(q,P) \text{ en un entorn de } (q^0,p^0).$$

Suposem ara que el següent jacobià $n\times n$ és no nul:

$$\det \frac{\partial P}{\partial p}(q^0,p^0) \neq 0 \qquad (1)$$

Llavors, en un entorn de (q^0,p^0), de l'equació $P = P(q,p)$ podem aïllar $p = p(q,P)$ i també podem escriure $Q = Q(q,P) = Q(q, p(q,P))$

Escrivint $S(q,P) = F(q, p(q,P))$, resulta:

$$\boxed{p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,P), \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P}(q,P)} \quad (2)$$

En efecte:
$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial q} = \left(p + Q\frac{\partial P}{\partial q}\right) + Q\cdot\frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial q} = p$$

$$\frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial P} = Q\,\frac{\partial P}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial P} = Q$$

$\left(\text{hem usat que } dP = \frac{\partial P}{\partial q}dq + \frac{\partial P}{\partial p}dp, \text{ i que } P(q,p(q,P)) = P\right)$

La funció escalar $S(q,P)$ és una <u>funció generatriu</u> de la transformació φ, i satisfà:
$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial P}(q^0,P^0) = \det \frac{\partial p}{\partial P}(q^0,P^0) \neq 0, \qquad P^0 = P(q^0,p^0).$$

Recíprocament, donada $S(q,P)$ tal que $\det \frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial P}(q^0,P^0)\neq 0$, localment es pot definir, de manera implícita a partir de les equacions (2), una transformació $\varphi(q,p) = (Q(q,p), P(q,p))$, la qual es comprova que és simplèctica veient que $dQ\wedge dP = dq\wedge dp$.
Un hamiltonià $H(q,p)$ i el seu corresponent $\tilde{H}(Q,P) = H\circ\varphi^{-1}$ vindran relacionats per: $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,P)) = \tilde{H}(\frac{\partial S}{\partial P}(q,P), P) \quad \forall (q,P)$
L'exemple més simple: $S(q,P) = P^T q = P_1 q_1 + \cdots + P_n q_n$, que correspon a $\varphi = id$.

- Hi ha transformacions simplèctiques φ que no compleixen (1), i per tant no admeten funció generatriu $S_1(q,P)$ (p. ex., la transformació $Q=p$, $P=-q$).
  Llavors tenim altres alternatives per definir una funció generatriu:

$$\left[\begin{array}{l}
\det \frac{\partial Q}{\partial p}(q^0,p^0)\neq 0 \longrightarrow p = \frac{\partial S_2}{\partial q},\ \ P = -\frac{\partial S_2}{\partial Q},\ \text{amb } S_2(q,Q),\ \det\frac{\partial^2 S_2}{\partial q\,\partial Q}\neq 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow \text{(transf. simpl. "lliures")} \\
\det \frac{\partial Q}{\partial q}(q^0,p^0)\neq 0 \longrightarrow q = \frac{\partial S_3}{\partial p},\ \ P = \frac{\partial S_3}{\partial Q},\ \text{amb } S_3(p,Q),\ \det\frac{\partial^2 S_3}{\partial p\,\partial Q}\neq 0. \\
\det \frac{\partial P}{\partial q}(q^0,p^0)\neq 0 \longrightarrow q = \frac{\partial S_4}{\partial p},\ \ Q = -\frac{\partial S_4}{\partial P},\ \text{amb } S_4(p,P),\ \det\frac{\partial^2 S_4}{\partial p\,\partial P}\neq 0.
\end{array}\right.$$

També es poden considerar funcions generatrius més generals:
com que $\det D\varphi(q^0,p^0) = 1 \neq 0$, tindrem algun jacobià no nul,
$$\det \frac{\partial(Q_I, P_J)}{\partial p}(q^0,p^0)\neq 0, \qquad I\subset\{1,\dots,n\},\ J = \{1,\dots,n\}\setminus I,$$
i llavors la transf. φ vindrà definida per
$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q_J = \frac{\partial S}{\partial P_J}, \quad P_I = -\frac{\partial S}{\partial Q_I}, \quad \text{amb } S(q, Q_I, P_J).$$

(vegeu [ArnoldKN, cap. 1, §3.2])
Podeu consultar a [MarsdenR, §6.5] una presentació més geomètrica, en termes del fibrat cotangent, de les funcions generatrius.

- La tècnica de les funcions generatrius permet intentar buscar un canvi simplèctic que redueixi un hamiltonià donat a una forma simple.

Partint de $H(q,p)$, busquem un canvi simplèctic $(q,p)=\varphi(\bar q,\bar p)$ tal que, per exemple, $H\circ\varphi=\bar p_1$ (redreçament del flux). Suposant que φ ve donada per funció generatriu del tipus $S(q,\bar p)$, aquesta funció haurà de satisfer l'EDP anomenada equació de Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}(q,\bar p)\right)=H\left(q_1,\dots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=\bar p_1, \qquad (*)$$

amb les $q_1,\dots,q_n$ com a variables i $\bar p_1,\dots,\bar p_n$ com a paràmetres.

Si podem trobar una solució $S(q,\bar p)$ de l'EDP amb $\det\frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial \bar p}\neq 0$, llavors el canvi simplèctic definit per $p=\frac{\partial S}{\partial q}$, $\bar q=\frac{\partial S}{\partial \bar p}$ porta el hamiltonià a la forma requerida, i les funcions $\bar p_1(q,p),\dots,\bar p_n(q,p)$ són integrals primeres.

(Nota: També es pot considerar a $(*)$, en lloc de $\bar p_1$, una funció $K(\bar p_1,\dots,\bar p_n)$; llavors $\bar p_1,\dots,\bar p_n$ són també integrals primeres.

Exemple molt simple (1 g.d.l.).

Hamiltonià $H(q,p)=\frac12(q^2+p^2)$ (oscil·lador harmònic)

$\rightsquigarrow$ eq. de Hamilton-Jacobi: $\frac12\left(q^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2\right)=\bar p$

$\frac{\partial S}{\partial q}=\pm\sqrt{2\bar p-q^2}$, escollim "+"

$$S(q,\bar p)=\int\sqrt{2\bar p-q^2}\,dq=\frac q2\sqrt{2\bar p-q^2}+\bar p\arcsin\frac{q}{\sqrt{2\bar p}},$$

i el canvi simplèctic ve definit per

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}=\sqrt{2\bar p-q^2},\quad \bar q=\frac{\partial S}{\partial \bar p}=\arcsin\frac{q}{\sqrt{2\bar p}} \rightsquigarrow q=\sqrt{2\bar p}\,\sin\bar q,\ p=\sqrt{2\bar p}\,\cos\bar q$$

(de fet hem obtingut $\bar q\in(-\frac\pi2,\frac\pi2)$, és a dir el semiplà $p>0$; si haguéssim escollit "−" tindríem el mateix canvi sobre $p<0$)

Aquesta construcció de les variables acció-angle es pot generalitzar a qualsevol hamiltonià amb 1 g.d.l. que tingui una família d'òrbites periòdiques (vegeu p.ex. [Lochak M, ap.6])

- Una altra tècnica per generar una transformació simplèctica és considerar-la com un <u>flux d'un hamiltonià adequat</u>.

Donada una funció $W(x)$, definim la transformació simplèctica $x = \varphi_1(\bar{x}, \varepsilon)$, essent $\varphi_t(\cdot, \varepsilon)$ el flux de $X_{\varepsilon W}$.

Naturalment, per conèixer explícitament $\varphi_1(\cdot, \varepsilon)$ caldria resoldre les equacions hamiltonianes associades a εW. Però si el paràmetre ε és petit, la transformació $\varphi_1(\cdot, \varepsilon)$ és propera a la identitat, i per aproximar-la podem considerar-la com una transformada entre funcions, $f(x) \mapsto (T_\varepsilon f)(\bar{x}) = f \circ \varphi_1(\bar{x}, \varepsilon)$, que ve donada per una <u>sèrie de Lie</u>:

$$T_\varepsilon f = f \circ \varphi_1(\cdot, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m}\Big|_{t=0} (f \circ \varphi_t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathcal{L}^m_{X_{\varepsilon W}} f =$$

$$\mathcal{L}_{X_{\varepsilon W}} f = \{f, \varepsilon W\} = \varepsilon \{f, W\}$$

$$= f + \varepsilon \{f, W\} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \{\{f, W\}, W\} + \cdots$$

Podem aplicar la sèrie a qualsevol funció $f(x)$, per exemple:

- un hamiltonià H per intentar que $T_\varepsilon H = H \circ \varphi_1$ tingui (truncant la sèrie) una expressió més simple (→ <u>forma normal</u>)
- una coordenada x_j, per tenir una aproximació dels components $x_j(\bar{x}, \varepsilon) = T_\varepsilon x_j$, $j = 1, \dots, 2n$, i així $\varphi_\varepsilon(\bar{x}, \varepsilon) = (T_\varepsilon x_1, \dots, T_\varepsilon x_{2n})$.

El <u>mètode de les transformades de Lie</u> admet moltes variants (el hamiltonià generador W es pot agafar autònom o no autònom; podem fer una sola transformació o successives transformacions que ens vagin apropant a una expressió més simple; podem formular el mètode per a l'entorn d'un punt d'equilibri, etc.)

Donen algorismes molt útils des del punt de vista pràctic, ja que:

- permeten dur a terme càlculs explícits en exemples concrets.
- poden ser implementats directament en ordinadors.

Podem trobar a [LochakM, ap. 7 i 8], [MeyerH, cap. VII] diverses variants de mètodes basats en sèries de Lie per a sistemes hamiltonians.
Una formulació més àmplia, per a sistemes d'EDOs en general, es troba a [ChowH]