ÒRBITES PERIÒDIQUES I APLICACIONS DE POINCARÉ

Dins de la teoria geomètrica de sistemes dinàmics hamiltonians, s'inclou l'estudi d'algunes qüestions locals com la dinàmica o comportament de les trajectòries en un entorn d'un punt d'equilibri o d'una òrbita periòdica. Per al cas d'una òrbita periòdica, podem estudiar aquesta dinàmica a partir d'una aplicació simplèctica associada, vista com a sistema dinàmic discret.

Molt sovint els sistemes dinàmics discrets (difeomorfismes) han estat utilitzats com a models de sistemes dinàmics continus (fluxos d'EDOs) ja que hi ha una gran analogia entre les propietats dels dos tipus de sistemes, i des del punt de vista computacional és més fàcil treballar amb sistemes discrets (iterar una aplicació) que amb sistemes continus (resoldre numèricament una EDO). Com a cas particular, tenim les aplicacions simplèctiques i els fluxes hamiltonians.

* Sistemes dinàmics discrets

M varietat diferenciable, $\dim M = n$.
Un sistema dinàmic discret ve definit per un difeomorfisme $f: M \longrightarrow M$.
Plantejant en M:
$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) & \text{eq. en diferències,} \\ x(0) = p & \text{cond. inicial,} \end{cases}$$
la solució ve donada per $x(k) = f^k(p)$, $k \in \mathbb{Z}$. Des del punt de vista dinàmic s'estudien les propietats del grup de difeos $(f^k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Def.
- L'**òrbita** d'un punt $p \in M$ és el conjunt $\{f^k(p) : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $f(p) = p$, direm que p és un **punt fix** de f; llavors l'òrbita de p es redueix a un punt.
- Si $f^k(p) = p$ per algun $k > 0$, direm que p és un **punt k-periòdic** de f; llavors l'òrbita de p és finita, i si k és el període mínim ($f^j(p) \neq p$ $\forall\, 0 < j < k$) l'òrbita està formada per k punts.

Nota. Aquestes definicions també són vàlides, amb algunes restriccions, encara que no tinguem un difeo global. Si $f: \underset{\text{obert}}{U \subset M} \longrightarrow M$ és un difeo entre U i $f(U)$, i es compleix que $f(U) \cap U \neq \emptyset$, llavors podrem iterar f un cert nombre de vegades, però l'òrbita $\{f^k(p)\}$ pot no estar definida $\forall k \in \mathbb{Z}$. Amb tot, podrem aplicar les definicions anteriors quan tinguin sentit. Si $f(U) \subset U$, llavors podem considerar tota la semi-òrbita $\{f^k(p) : k \geq 0\}$, per a $p \in U$.

Per estudiar el comportament d'un difeo prop d'un punt fix p, és útil considerar la seva linealització en aquest punt, que ve donada per la diferencial $Df(p)$. Els valors propis $\mu_1, \dots, \mu_n$ de $Df(p)$ reben el nom de **multiplicadors característics** de p.

Def. Si p és un punt fix de f amb multiplicadors $\mu_1, \dots, \mu_n$, direm que p és un punt fix
- elemental si $\mu_j \neq 1 \ \forall j$
- hiperbòlic si $|\mu_j| \neq 1 \ \forall j$
- el·líptic si $|\mu_j| = 1 \ \forall j$, i $Df(p)$ diagonalitza
- atractor si $|\mu_j| < 1 \ \forall j$
- repulsor si $|\mu_j| > 1 \ \forall j$.

Anàlogament per a un punt k-periòdic de f, veient-lo com a punt fix de f^k.

Notem que els punts fixos elementals de f són aïllats, ja que si p és pt. fix elemental, llavors és solució de $f(x) - x = 0$, localment única ja que $\det(Df(p) - I) \neq 0$.

Cas simplèctic: Un difeo que és aplicació simplèctica s'anomena un simplectomorfisme.
En aquest cas $Df(p)$ és matriu simplèctica, i per les propietats dels seus valors propis no poden existir punts fixos atractors ni repulsors.

* Sistemes dinàmics continus

Donat un camp vectorial X sobre una varietat M, és a dir un sistema autònom $\dot{x} = X(x)$, el seu flux $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ defineix un sistema dinàmic continu.
Les φ_t satisfan les propietats de grup: $\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_1 + t_2}$, $\varphi_0 = id$.
Cada φ_t és un difeo, ja que $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Si $X(x)$ és C^r, llavors el flux $\varphi_t(x)$ és C^r respecte (t, x).

Si el camp X és complet (trajectòries definides $\forall t \in \mathbb{R}$), llavors tenim $\varphi_t : M \to M \ \forall t \in \mathbb{R}$, però en general tindrem $\varphi_t : \mathcal{U}_t \subset M \to M$, difeo entre $\mathcal{U}_t$ i $\varphi(\mathcal{U}_t)$.

Notem que recíprocament podem definir el camp vectorial a partir del flux:

$$X(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x).$$

* Aplicació temps fix

Una manera simple de relacionar sistemes dinàmics continus i discrets és considerar, per a un camp vectorial $X(x)$, el flux φ_T per a un T donat, el qual serà un sistema dinàmic discret en dim. n.

Tenim: si x^0 és punt fix de $\varphi_T \Rightarrow \varphi_t(x^0)$ és òrbita periòdica de X de període T (ja que $\varphi_{t+T}(x^0)=\varphi_t\circ\varphi_T(x^0)=\varphi_t(x^0)$)

si x^0 és punt k-periòdic de $\varphi_T \Rightarrow \varphi_t(x^0)$ és òrbita periòdica de X, de període kT.

Si $\varphi_t(x^0)$ és o.p. de període mínim T, definim els seus multiplicadors característics com els que té x^0 com a punt fix de φ_T, és a dir, els vaps de la matriu de monodromia $D\varphi_T(x^0)$ de l'o.p. (aquests vaps no depenen del punt x^0 escollit sobre l'o.p.)

Però no és raonable definir o.p. elemental, hiperbòlica, el·líptica, ... directament a partir del difeo φ_T.

En efecte, un punt fix x^0 de φ_T no és mai un punt fix elemental, ja que no és aïllat: tots els altres punts $\varphi_t(x^0)$, $t\in\mathbb{R}$, de l'o.p. són també punts fixos de φ_T,

$$\varphi_T(\varphi_t(x^0)) = \varphi_{t+T}(x^0) = \varphi_t(x^0).$$

[Recordem: $D\varphi_t(x^0)$ és solució de les equacions variacionals de l'o.p. $\varphi_t(x^0)$]

De fet, derivant respecte t aquesta igualtat, i posant $t=0$, tenim:

$$D\varphi_T(x^0)\,X(x^0) = X(x^0) \longrightarrow X(x^0)\neq 0 \text{ és vep de vap } 1 \text{ de } D\varphi_T(x^0)$$

$\Rightarrow$ una o.p. sempre té l'1 com a multiplicador característic.

Ens podem plantejar com a qüestió inversa el problema d'interpolació: donat un difeo $f: M\to M$, estudiar si pel flux d'algun camp vectorial podem escriure $f=\varphi_T$. Això en general serà fals. Clarament, serà una condició necessària que f sigui un difeo. isotòpic a la identitat, és a dir, $\exists\, \Psi: [0,1]\times M\to M$ C^r, t.q. $\Psi(0,\cdot)=id$, $\Psi(1,\cdot)=f$, amb $\Psi(t,\cdot)$ difeo $\forall t$. (p.ex., aquesta condició no es complirà si $\det Df(x)<0$) Tot i així, es pot veure que no és una condició suficient. (vegeu també el problema 5.2)

* Aplicació període

Considerem un sistema periòdic (no autònom):

$\dot{x} = X(x,t)$, on X és T-periòdica respecte t, definida per a $(x,t)\in M\times\mathbb{R}$.

Escrivim $\varphi_{t_0,t}(x)$ la solució que compleix la condició inicial $\varphi_{t_0,t_0}(x)=x$.

Llavors considerem el sistema dinàmic discret definit per l'aplicació període $\varphi_{0,T}$.

També tenim: si x^0 és punt fix de $\varphi_{0,T} \Rightarrow \varphi_{0,t}(x^0)$ solució T-periòdica de $\dot{x}=X(x,t)$

En aquest cas, es pot provar que, donat un difeo $f: M\to M$, la condició que f sigui un difeo. isotòpic a la identitat és necessària i suficient perquè existeixi un sistema 1-periòdic que sigui interpolació del difeo: $f=\varphi_{0,1}$.

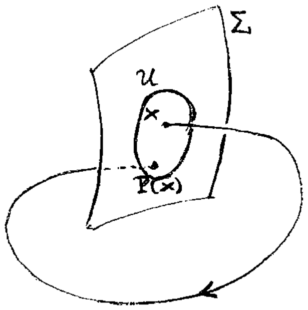
(vegeu [MeyerH, §V.B4]) Si f és un simplectomorfisme, demanant que f sigui isotòpic a la identitat per simplectomorfismes, es pot interpolar per un sist. hamiltonià periòdic.

* Aplicació de Poincaré

M varietat n-dimensional, X camp vectorial (sistema autònom)

Donat un punt $x^0 \in M$, sigui Σ una secció transversal al camp X en aquest punt: una hipersuperfície ($\dim \Sigma = n-1$, p. ex. un hiperplà) que contingui x^0, amb $T_x\Sigma$ transversal a $X(x)$ per a $x \in \Sigma$. Suposem que, per algun $T>0$ tenim $\varphi_T(x^0) \in \Sigma$, i que $\varphi_t(x^0) \notin \Sigma$ $\forall\, 0<t<T$.

Llavors definim, en un entorn $\mathcal{U}$ de x^0 dins Σ, l'aplicació de Poincaré $P : \mathcal{U} \subset \Sigma \longrightarrow \Sigma$, prenent $P(x)$ com el primer punt de tall de la trajectòria $\varphi_t(x)$, $t>0$, amb Σ.



Així tenim $\boxed{P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)}$ (*)

on $\tau(x)$ és el temps de "primer retorn".

Suposant que Σ ve definida per $h(x)=0$, $dh(x)\cdot X(x) \neq 0$, $x \in \Sigma$, aplicant el teo. de la f. implícita a l'eq. $h(\varphi_t(x))=0$ obtenim $t=\tau(x)$ en un entorn de x^0, complint $\varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$ $\forall x$ i $\tau(x^0)=T$.

(notem que només calia imposar Σ transversal al camp en $\varphi_T(x^0)$)

Si el camp X és C^r, el flux $\varphi_t(x)$ també ho és i per tant P també és C^r.

Suposarem que $P(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \phi$. Veurem després que P és un difeo, i per tant podem considerar l'aplicació de Poincaré com un sist. dinàmic discret en dim $n-1$.

Exemple: L'aplicació període associada a un sistema periòdic $\dot{x} = X(x,t)$ és un cas particular d'apl. de Poincaré. Podem veure el sistema periòdic com un sistema autònom definit a $M \times S^1$:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,s) \\ \dot{s} = 1 \end{cases}$$

Llavors $\Sigma = \{s=0\}$ és una secció transversal al camp vectorial $(X(x,s),1)$, i l'apl. de Poincaré associada és l'aplicació període: $P = \varphi_{0,T}$.

Ens interessa estudiar el cas d'una apl. de Poincaré associada a una òrbita periòdica.

Sigui γ o.p. de període mínim T, i escollim un punt $x^0 \in \gamma$ i una secció Σ, transversal a X en el punt $x^0 = \varphi_T(x^0)$. Lògicament tindrem $P(x^0) = x^0$ i per tant x^0 és un punt fix de P

Dins l'entorn $\mathcal{U}$ podem dir:

- si x és punt fix de $P \Rightarrow \varphi_t(x)$ o.p. de període $\tau(x) \simeq T$.
- si x és punt k-periòdic de $P \Rightarrow \varphi_t(x)$ o.p. de període $\tau(x)+\tau(P(x))+\dots+\tau(P^{k-1}(x)) \simeq kT$.

Per estudiar la dinàmica prop de γ, considerem la linealització de P en el punt x^0, donada per la diferencial $DP(x^0)$. Per relacionar-la amb $D\varphi_T(x^0)$, escollim unes coordenades $x_1, \dots, x_n$ en les quals $X(x^0) = (1, 0, \dots, 0)$ i $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ (és a dir, $h(x_1, \dots, x_n) = x_1$). Per la def. de l'aplicació de Poincaré, tenim:

$$(0, P(\bar{x})) = \varphi_{\tau(\bar{x})}(0, \bar{x}).$$

Diferenciem respecte $\bar{x}$,
$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \hline DP(\bar{x}) \end{pmatrix} = X(\varphi_{\tau(\bar{x})}(0,\bar{x}))\, D\tau(\bar{x}) + D_{\bar{x}}\varphi_{\tau(\bar{x})}(0,\bar{x})$$

i avaluem en $x^0 = (0, \bar{x}^0)$,
$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \hline DP(\bar{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\tau(\bar{x}^0) \\ \hline 0 \end{pmatrix} + D_{\bar{x}}\varphi_T(x^0).$$

D'aquí deduïm $D_{\bar{x}}\varphi_T(x^0)$, que és tota la matriu $D_x\varphi_T(x^0)$ menys la 1ª columna.
Recordant que $X(x^0)$ és vep de vap 1 de $D_x\varphi_T(x^0)$, obtenim:
$$D_x\varphi_T(x^0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -D\tau(\bar{x}^0) \\ \hline 0 & \\ \vdots & DP(\bar{x}^0) \\ 0 & \end{array}\right)$$

Per tant, si l'o.p. γ té els multiplicadors característics $1, \mu_2, \dots, \mu_n$, llavors els multiplicadors característics de x^0 com a punt fix de P són $\mu_2, \dots, \mu_n$.
(aquests multiplicadors no depenen del punt $x^0 \in \gamma$ escollit ni de la secció Σ per x^0)

Així podem considerar $\mu_2, \dots, \mu_n$ com els multiplicadors "no trivials" de γ, i definir o.p. elemental, hiperbòlica, el·líptica, atractora, repulsora, a partir del que sigui x^0 com a punt fix de P.

En el cas que l'o.p. γ sigui elemental, és a dir que x^0 és un punt fix elemental de P i, per tant, aïllat, podrem dir que l'o.p. és <u>aïllada</u>, en el sentit que en un entorn no hi ha o.p.'s de període proper a T.

* <u>Integrals primeres de difeomorfismes</u>.

M varietat diferenciable, $\dim M = n$.
Per a un difeo $f: M \to M$, es defineix <u>integral primera</u> com una funció $G: M \to \mathbb{R}$ (o $G: \mathcal{U} \subset M \to \mathbb{R}$) tal que $G(f(x)) = G(x)$ $\forall x \in M$.

- Suposem que f té una integral primera G, i que p és un punt fix de f sobre el qual G és <u>no degenerada</u> ($dG(p) \neq 0$). Aleshores, el punt fix p té l'1 com a multiplicador característic, i per tant no pot ser un punt fix elemental.

  En efecte: Derivant la igualtat $G(f(x)) = G(x)$, deduïm $dG(f(x)) Df(x) = dG(x)$.
  (*) En el punt p, $dG(p) Df(p) = dG(p)$ $\rightsquigarrow$ $dG(p) \neq 0$ és "vep per l'esq." de vap 1, de $Df(p)$
  és a dir $Df(p)^T \nabla G(p) = \nabla G(p)$ $\rightsquigarrow$ $\nabla G(p)$ és vep de vap 1 de $Df(p)^T$.

- Cada hipersuperfície de nivell $N_c = G^{-1}(c)$ és invariant: $f(N_c) \subset N_c$. ($\dim N_c = n-1$)
  En unes coordenades $(x_1, \dots, x_n)$ en un entorn de p, com que G és no degenerada podem suposar $\frac{\partial G}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Llavors, podem prendre $(c, x_1, \dots, x_{n-1})$ com a noves coordenades, amb $c = G(x_1, \dots, x_n)$. Escrivint $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, el difeo f ve donat per $(c, \tilde{x}) \longmapsto (c, \tilde{f}_c(\tilde{x}))$ i podem considerar cada $\tilde{f}_c$ com un "<u>difeo. reduït</u>" sobre N_c. Si escrivim el punt p com a $(c_0, \tilde{x}^0)$ en les noves coordenades, tenim:
  $$Df(p) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline * & \\ \vdots & D\tilde{f}_{c_0}(\tilde{x}^0) \\ * & \end{array}\right), \qquad \tilde{f}_{c_0}(\tilde{x}^0) = \tilde{x}^0$$

  Per tant, si els multiplicadors característics de p com a punt fix de f són $1, \mu_2, \dots, \mu_n$, llavors els multipl. característics de $\tilde{x}^0$ com a punt fix de $\tilde{f}_{c_0}$ són $\mu_2, \dots, \mu_n$.

  <u>Lema</u>: Si el punt fix p (de f) té l'1 com a multipl. característic <u>simple</u>, llavors p pertany a una corba de punts fixos de f parametritzada per c (només cal aplicar el teo. f. implícita a l'eq. $\tilde{f}_c(\tilde{x}) - \tilde{x} = 0$ en el punt $(c_0, \tilde{x}^0)$, per obtenir un punt fix $\tilde{x} = \tilde{x}(c)$ sobre cada N_c)

  En canvi, si l'1 és multiplicador característic de multiplicitat ≥ 2, llavors és possible que els punts fixos formin altres conjunts o bé es redueixin a un punt (problema <u>5.5</u>)

- Generalitzant (*), és fàcil provar que si f té r integrals primeres $G_1, \dots, G_r$, independents sobre un punt fix p (és a dir, $dG_1(p), \dots, dG_r(p)$ lin. indep.), llavors l'1 és multiplicador característic de multiplicitat $\geq r$. Si és $= r$, es pot considerar un difeo. reduït sobre una varietat $(n-r)$-dim., i hi ha una varietat r-dim. de punts fixos.

* <u>Aplicació de Poincaré reduïda en un sistema amb integrals primeres.</u>

Si apliquem la noció d'aplicació de Poincaré al cas d'un sistema hamiltonià, ens trobarem que una o.p. γ no podrà ser mai elemental, ja que la matriu de monodromia $D\varphi_T(x^0)$ és simplèctica i, per tant, tindrà l'1 com a vap de multiplicitat parella ≥ 2.

En realitat, això succeirà per a qualsevol sistema autònom que tingui una <u>integral primera global</u>. Considerem doncs X camp vectorial (<u>no necessàriament hamiltonià</u>), amb una integral primera H (és a dir, $\mathcal{L}_X H = 0$)

Sigui $\gamma = \{\varphi_t(x^0)\}$ una o.p. de període T, i suposem que H és <u>no degenerada</u> sobre γ, és a dir, $dH^0(\varphi_t(x^0)) \neq 0$; n'hi ha prou imposant-ho per a $t=0$ ja que de $H(\varphi_t(x)) = H(x)$ deduïm $dH(\varphi_t(x))\, D\varphi_t(x) = dH(x)$.

(<u>Nota</u>: la no degeneració sempre es compleix en el cas hamiltonià, ja que H no té punts crítics sobre γ)

Llavors, $\begin{cases} X(x^0) \text{ és vep de vap } 1 \text{ de } D\varphi_T(x^0) \\ \nabla H(x^0) \text{ és vep de vap } 1 \text{ de } D\varphi_T(x^0)^T \text{ (per les propietats dels s.d. discrets)} \end{cases}$

Observem que aquests dos vectors són lin. indep., ja que són no nuls i, a més,

$$\langle \nabla H(x^0), X(x^0) \rangle = dH(x^0)\, X(x^0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(\varphi_t(x^0)) = 0 \qquad (1)$$

Es dedueix que $D\varphi_T(x^0)$ té l'1 com a vap de multiplicitat ≥ 2, ja que si fos simple, prenent la forma de Jordan deduiríem que $X(x^0)$ i $\nabla H(x^0)$ són lin. dep. (aquest fet, ja el coneixíem en el cas hamiltonià)

- Ara, considerem una secció transversal Σ al camp X en el punt x^0, i l'aplicació de Poincaré $P: \mathcal{U} \subset \Sigma \longrightarrow \Sigma$, que té x^0 com a punt fix.

  L'aplicació P té $H|_\Sigma$ com a integral primera: $H(P(x)) = H(\varphi_{\tau(x)}(x)) = H(x)$.

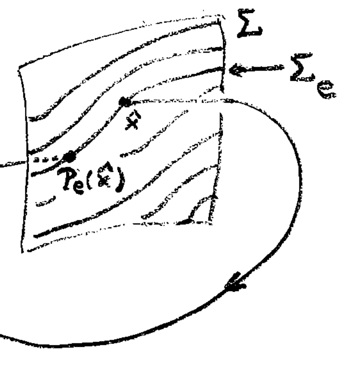
També veiem que $H|_\Sigma$ és no degenerada en el punt x^0, és a dir $dH(x^0)|_{T_{x^0}\Sigma} \neq 0$, ja que si fos degenerada tindríem $dH(x^0)\,v = 0 \quad \forall\, v \in T_{x^0}\Sigma$, i tenint en compte també (1) deduiríem que $dH(x^0) = 0$

Aleshores, per les propietats dels difeos amb integrals primeres, podem restringir P als nivells o <u>seccions reduïdes</u> $\Sigma_e = \Sigma \cap H^{-1}(e)$, de <u>dim $n-2$</u> (ja que $dH(x^0)$ és no deg. sobre $T_{x^0}\Sigma$). Prenent coordenades $(e, \hat{x}) = (e, x_1, \dots, x_{n-2})$ sobre Σ, l'aplicació de Poincaré P ve donada per

$(e, \hat{x}) \longmapsto (e, P_e(\hat{x}))$,

i $P_e: \mathcal{U}_e \subset \Sigma_e \longrightarrow \Sigma_e$

és l'<u>aplicació de Poincaré reduïda</u>



Suposarem $H(x^0) = 0$.

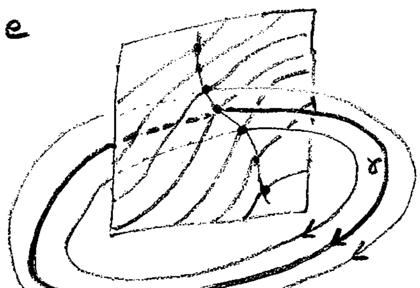
• A més si γ té $1, 1, \mu_3, \dots, \mu_n$ com a multiplicadors característics, llavors els multiplicadors característics de $\hat{x}^0$ com a punt fix de P_0 són $\mu_3, \dots, \mu_n$, és a dir, els vaps de $DP_0(\hat{x}^0)$.

De fet, podem relacionar les matrius $D\varphi_T(x^0)$ i $DP_0(\hat{x}^0)$. Suposem que hem escollit la secció Σ_0 de manera que $\nabla H(x^0) \in T_{x^0}\Sigma_0$ (és possible ja que $\nabla H(x^0)$ i $X(x^0)$ són lin. indep.). Llavors, si escollim una base de $T_{x^0}M$ de la forma $u_1 = X(x^0)$, $u_2 = \nabla H(x^0)$, $u_3, \dots, u_n$, amb $u_3, \dots, u_n \in T_{\hat{x}^0}\Sigma_{e_0}$, tindrem:

$$D\varphi_T(x^0) = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & DP_0(\hat{x}^0) & \\ 0 & * & & & \end{pmatrix}$$

En aquest context d'integrals primeres, l'o.p. γ es considera "no degenerada" si té l'1 com a multiplicador característic doble (multiplicitat=2); llavors x^0 és punt fix elemental de l'aplicació de Poincaré reduïda P_0.

• Si γ és o.p. "no degenerada", el "teorema del cilindre" ens diu que γ pertany a una família d'o.p.'s parametritzades per e (en efecte, l'aplicació de Poincaré P té l'1 com a multipl. característic simple, i aplicant el lema ja vist per a difeos amb i.p.'s, hi ha una corba de punts fixos de P parametritzada per e).



• També és fàcil provar que, si el camp X té integrals primeres $F_1, \dots, F_r$ independents sobre γ (és a dir, $dF_1(x^0), \dots, dF_r(x^0)$ lin. indep.), llavors γ té l'1 com a multiplicador característic de multiplicitat $\geq r+1$. Si és $= r+1$, llavors γ pertany a una família r-paramètrica d'o.p.'s. (només cal aplicar la propietat anàloga per a difeos, a l'aplicació de Poincaré).

* Aplicació de Poincaré en un sistema hamiltonià

Suposem ara que el camp vectorial és hamiltonià: $X = X_H$, amb H com a integral primera, sobre una varietat simplèctica (M, ω).

- Proposició. Si la secció reduïda Σ_0 és una subvarietat simplèctica, aleshores l'aplicació de Poincaré reduïda $P_e : \mathcal{U}_e \subset \Sigma_e \longrightarrow \Sigma_e$ és un difeo. simplèctic, per a $|e|$ prou petit.

(vegeu [MeyerH, §V.E4], [AbrahamM, cap. 8]).

Observem que, perquè Σ_0 sigui subvarietat simplèctica, la restricció de la forma simplèctica $\omega|_{\Sigma_0}$ ha de ser no degenerada.

Exemple. Sobre $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega^0)$, $\Omega^0 = \sum_{j=1}^{n} dq_j \wedge dp_j$, considerem un hamiltonià $H(q,p)$ amb una o.p. per l'origen. Suposant p.ex. $\frac{\partial H}{\partial p_1}(0) \neq 0$, tenim $\dot{q}_1 \neq 0$ i podem considerar la secció $\Sigma = \{q_1 = 0\}$. La secció reduïda $\Sigma_0 = \Sigma \cap H^{-1}(0)$ ve definida per $q_1 = 0$, $p_1 = g(q_2, \dots, q_{n-1}, p_2, \dots, p_{n-1})$. Llavors, $\omega|_{\Sigma_0} = \sum_{j=2}^{n} dq_j \wedge dp_j + 0 \wedge dg =$
$= \sum_{j=2}^{n} dq_j \wedge dp_j$, no degenerada sobre Σ_0.

- Proposició. Si X_H té integrals primeres $F_1 = H, F_2, \dots, F_r$ independents sobre γ, i en involució ($\{F_i, F_j\} \equiv 0 \ \forall i,j$), llavors γ té l'1 com a multiplicador característic de multiplicitat $\geq 2r$.

(Cal usar que tots els X_{F_j} són veps de vap 1 del flux φ_T de X_H)

* Interpolació i suspensió

Donat un difeo $f : M \longrightarrow M$, $\dim M = n$, ja ens hem plantejat si podia ser el flux, $f = \varphi_T$, d'algun camp vectorial X sobre M (interpolació). Ara ens plantegem el problema de la suspensió: si f pot ser aplicació de Poincaré d'un camp vectorial X definit sobre una varietat $\tilde{M} \supset M$, $\dim \tilde{M} = n+1$, de manera que M sigui secció transversal al camp X.

- Si el difeo f és isotòpic a la identitat, ja hem vist que es pot interpolar per un camp vectorial periòdic, és a dir, definit a $\tilde{M} = M \times S^1$.
- En general, qualsevol difeo $f : M \to M$ admet suspensió pel camp $X(x,s) \equiv (0,1)$ definit sobre una varietat $\tilde{M}_f$ construïda com $M \times [0,1]$ identificant-ne els punts $(x,1)$ i $(f(x), 0)$, $\forall x \in M$. Aquesta varietat $\tilde{M}_f$ pot ser no orientable. (vegeu [KatokH, §0.3])
- Si (M, ω) és v. simplèctica, $\dim M = 2n$, tot difeo. simplèctic $f : M \longrightarrow M$ admet suspensió per un camp hamiltonià sobre una varietat simpl. $\hat{M}$, $\dim \hat{M} = 2n+2$ (vegeu [Cushman78])