# Càlcul Vectorial (CV)

Pere Gutiérrez

Setembre 2022

# Integració sobre corbes

- Corbes a $\mathbb{R}^n$ (tipus i parametritzacions)
- Longitud d'una corba: $\mathrm{long}(C) = \int_C \mathrm{d}\ell$
- Integral d'una funció escalar $f$ sobre una corba: $\int_C f\,\mathrm{d}\ell$
- Circulació d'un camp vectorial $\boldsymbol{F}$ al llarg d'una corba orientada: $\int_{C^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \rangle$

## Corbes a $\mathbb{R}^n$

- Nocions (informals):
  - corba *suau* : sense angles ni punxes
  - corba *simple* : sense autointerseccions
  - corba *regular* : suau i simple
  - corba *tancada* : si els punts inicial i final coincideixen
  - corba *regular a trossos* : formada per un nombre finit de corbes regulars, $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ , de manera que el punt final de cada tros $C_i$ és el punt inicial del tros següent $C_{i+1}$

- Una corba regular $C \subset \mathbb{R}^n$ admet una *parametrització regular* :

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \; I = [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{array}$$

  que compleix:

  - $C = \sigma(I) = \{\sigma(t) : t \in I\}$
  - és de classe $\mathcal{C}^1$
  - és injectiva (excepte que tindrem $\sigma(a) = \sigma(b)$ si la corba és tancada)
  - $\sigma'(t) \neq \mathbf{0}$ per a tot $t \in (a, b)$ (admetem que $\sigma'(t)$ tendeixi a 0 si $t \to a^+$ o $t \to b^-$)

- En el cas d'una corba regular a trossos, $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, usualment considerem, per a cada tros $C_i$, una parametrització regular $\sigma_i(t)$, $t \in [a_i, b_i]$ (podem fer que $b_i = a_{i+1}$ per a cada $i$, però no cal)

- En cada punt (regular) $\sigma(t)$ d'una corba $C$, considerem:
  - $\sigma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, *vector tangent* (segons la parametrització escollida, n'hi ha infinits possibles tots en la mateixa direcció)
  - $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{x_1'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$, *velocitat*
  - $\boldsymbol{T}_\sigma(t) = \dfrac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$, *vector tangent unitari* (n'hi ha dos possibles, associats a les dues orientacions de $C$)
- Dues parametritzacions regulars d'una mateixa corba $C$,

$$\sigma(t),\ t \in I \qquad\qquad \gamma(s),\ s \in J$$

es relacionen per un *canvi de paràmetre* $t = h(s)$
(cal $h : J \longrightarrow I$ bijectiva, $\mathcal{C}^1$ i amb $h'(s) \neq 0$ per a tot $s$).
Aplicant la regla de la cadena a la igualtat $\gamma(s) = \sigma(t)$, amb $t = h(s)$, obtenim:

$$\gamma'(s) = \sigma'(t) \cdot h'(s), \qquad \|\gamma'(s)\| = \|\sigma'(t)\| \cdot |h'(s)|, \qquad \boldsymbol{T}_\gamma(s) = \pm \boldsymbol{T}_\sigma(t).$$

**Longitud d'una corba**

- *Def.* : $C \subset \mathbb{R}^n$ corba regular, parametritzada per $\sigma(t),\ \ t \in [a, b]$

$$\boxed{\mathrm{long}(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \ \mathrm{d}t} = \int_C \mathrm{d}\ell$$

  - *Notació* : $\boxed{\mathrm{d}\ell = \|\sigma'(t)\| \ \mathrm{d}t}$ és l'*element de longitud* (o element escalar de longitud)
  - *Obs.* : la longitud no depèn de la parametrització escollida

- Si $C$ és corba regular a trossos, $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ , sumem les longituds de cada tros: $\mathrm{long}(C) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{long}(C_i)$

- Cas particular 1: una <u>*gràfica*</u> a $\mathbb{R}^2$

  Considerem la corba $C$ definida per $y = f(x), \; a \le x \le b$

  Es pot parametritzar prenent la pròpia coordenada $x$ com a paràmetre: $\sigma(x) = (x, f(x)), \; a \le x \le b$.

  L'element de longitud és $\boxed{\mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x}$ (i servirà per a d'altres integrals de funcions escalars sobre $C$), i obtenim

  $$\operatorname{long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

  *Obs.*: Si $\alpha(x)$ és l'angle que forma (en cada punt) el vector tangent amb la direcció horitzontal, podem escriure: $\operatorname{long}(C) = \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha(x)}$ .

- Cas particular 1': gràfica d'una corba a $\mathbb{R}^3$, definida per $y = f(x), \; z = g(x), \; a \le x \le b$.

  Parametritzant per $\sigma(x) = (x, f(x), g(x)), \; a \le x \le b$, obtenim: $\operatorname{long}(C) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2}\, \mathrm{d}x$.

- Cas particular 2: corba de $\mathbb{R}^2$ expressada <u>*en coordenades polars*</u>

  En les coordenades polars $(r, \theta)$ de $\mathbb{R}^2$, considerem la corba $C$ definida per $r = g(\theta)$, $a \le \theta \le b$.

  Passant a coordenades cartesianes $(x, y)$, tenim la parametrització

$$\sigma(\theta) = (g(\theta)\cos\theta,\ g(\theta)\sin\theta), \quad a \le \theta \le b.$$

  L'element de longitud és $\boxed{\mathrm{d}\ell = \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2}\ \mathrm{d}\theta}$

  i obtenim

$$\mathrm{long}(C) = \int_a^b \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2}\ \mathrm{d}\theta$$

## Integral d'una funció escalar sobre una corba

- *Def.*:
  $C \subset \mathbb{R}^n$ corba regular, parametritzada per $\sigma(t), \;\; a \leq t \leq b$
  $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ funció escalar, contínua a trossos (pot tenir discontinuïtats, però només evitables o de salt finit)

$$\boxed{\int_C f \, \mathrm{d}\ell = \int_a^b f(\sigma(t)) \, \|\sigma'(t)\| \, \mathrm{d}t}$$

- *Obs.*:
  - si $f \equiv 1$, obtenim la longitud de $C$
  - la integral d'una funció escalar $f$ sobre $C$ no depèn de la parametrització escollida
  - si $C$ és regular a trossos, $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, apliquem la definició sobre cada tros i sumem: $\displaystyle\int_C f \, \mathrm{d}\ell = \sum_{i=1}^{r} \int_{C_i} f \, \mathrm{d}\ell$

- Interpretació més simple:

  En el cas d'una corba plana $C \subset \mathbb{R}^2$, i suposant $f \geq 0$, podem veure la integral $\displaystyle\int_C f \, \mathrm{d}\ell$ com l'<u>*àrea d'una tanca*</u> que té com a base la corba $C$ i altura en cada punt donada per la funció $f$.

- **Aplicacions de les integrals sobre corbes**

Ara veurem la corba $C \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o $3$) com un *filferro* o *cable*, amb una *densitat lineal* de massa donada per una funció $\rho : C \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$. Aleshores podem calcular:

  - *Massa*
  $$\mathrm{m}(C) = \int_C \rho \, \mathrm{d}\ell$$
  - *Mitjana* d'una magnitud $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ (p.ex. la temperatura),
  $$\overline{f} = \frac{1}{\mathrm{m}(C)} \int_C f \rho \, \mathrm{d}\ell$$
  - *Centre de masses*
  $$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\mathrm{m}(C)} \left( \int_C x \rho \, \mathrm{d}\ell, \int_C y \rho \, \mathrm{d}\ell, \int_C z \rho \, \mathrm{d}\ell \right)$$
  - *Moment d'inèrcia* respecte un eix $e$;
  si $r : C \longrightarrow \mathbb{R}$ és la distància de cada punt de $C$ a l'eix $e$,
  $$I_e = \int_C r^2 \rho \, \mathrm{d}\ell$$

- Aplicacions en el **cas homogeni** d'un filferro de densitat $\rho \equiv \mathrm{const}$,
  - *Massa*
    $$\mathrm{m}(C) = \rho \, \mathrm{long}(C)$$
  - *Mitjana* d'una magnitud $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$
    $$\overline{f} = \frac{1}{\mathrm{long}(C)} \int_C f \, \mathrm{d}\ell$$
  - *Centre geomètric*
    $$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\mathrm{long}(C)} \left( \int_C x \, \mathrm{d}\ell, \int_C y \, \mathrm{d}\ell, \int_C z \, \mathrm{d}\ell \right)$$
  - *Moment d'inèrcia* respecte un eix $e$
    $$I_e = \rho \int_C r^2 \, \mathrm{d}\ell$$

## Camps vectorials

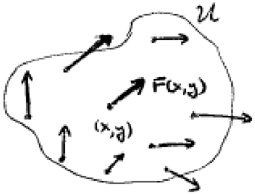
- Un *camp vectorial* sobre un domini $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ és simplement una funció vectorial, entenent que a cada punt del domini li assigna un vector,

$$\boxed{\boldsymbol{F} : \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{punts}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{vectors}}} \qquad \text{(pot ser continu, de classe } \mathcal{C}^1\text{, etc)}$$

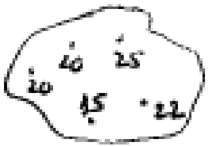
Notacions:

- $\boldsymbol{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ per a un camp vectorial a $\mathbb{R}^2$ (*c.v. "pla"*)
- $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z))$ per a un camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

En canvi, un *camp escalar* assigna a cada punt un escalar (és a dir, un nombre real).



camp vectorial



camp escalar

- Alguns fenòmens físics vénen descrits per camps escalars, i d'altres per camps vectorials.
  - camps escalars: temperatura, pressió, ...
  - camps vectorials:
    - ⋆ camp de velocitats (p.ex. d'un corrent d'aigua)
    - ⋆ camp de forces (gravitatori, elèctric, ...)
    - ⋆ (etc)
- Segons el context físic, un camp vectorial s'associa a un tipus o altre de sistema d'EDOs,
    - ⋆ per a una partícula que es mou segons un camp de velocitats: $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$.
    - ⋆ per a una partícula de massa $m$ (o càrrega $q$) sotmesa a un camp de forces: $m\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ (sistema d'EDOs de segon ordre)

  Cada solució $\boldsymbol{X}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ és una possible trajectòria de la partícula (una corba parametritzada pel temps $t$).

## Circulació d'un camp vectorial al llarg d'una corba

- *Def.* :
  $C \subset \mathbb{R}^n$ corba regular, parametritzada per $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$
  $\boldsymbol{F} : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial, continu a trossos
  La ***circulació*** de $\boldsymbol{F}$ al llarg de $C$, segons la parametrització $\sigma$, és

$$\boxed{\int_\sigma \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\,\rangle = \int_a^b \langle\, \boldsymbol{F}(\sigma(t)),\ \sigma'(t)\,\rangle\ \mathrm{d}t}$$

  - *Notació* : $\boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \sigma'(t)\,\mathrm{d}t}$ és el *vector diferencial de longitud* (o element vectorial de longitud)
  - si $C$ és regular a trossos, apliquem la definició sobre cada tros i sumem

- Més notacions:
  - Si $C$ és corba tancada, escrivim $\displaystyle\oint_\sigma \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\rangle$
  - Si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ camp vectorial a $\mathbb{R}^2$, podem escriure

$$\int_\sigma \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\rangle = \int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b [P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)]\ \mathrm{d}t$$

    on $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, i usem la notació $\mathrm{d}x = x'(t)\ \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\ \mathrm{d}t$.
  - Anàlogament, si $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ camp vectorial a $\mathbb{R}^3$, podem escriure

$$\int_\sigma \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\rangle = \int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

- *Interpretació*: Si $\boldsymbol{F}$ camp de forces, la circulació $\displaystyle\int_\sigma \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\,\rangle$ correspon al *treball* realitzat per $\boldsymbol{F}$ sobre una partícula que es mou al llarg de la trajectòria $\sigma$:
  - força favorable al moviment si $\langle\, \boldsymbol{F}(\sigma(t)),\ \sigma'(t)\,\rangle > 0$ (angle agut)
  - força contrària al moviment si $\langle\, \boldsymbol{F}(\sigma(t)),\ \sigma'(t)\,\rangle < 0$ (angle obtús)

  *Obs.*: Si $\boldsymbol{F}$ és ortogonal al vector tangent $\sigma'(t)$ per a tot $t$, el treball o circulació és 0.

- **Orientació d'una corba**
  - Una corba $C$ entre dos punts $A$ i $B$ té dues possibles orientacions: de $A$ a $B$, i de $B$ a $A$ (i si la corba és tancada?)
  - Una definició millor: una orientació consisteix en escollir un vector tangent unitari $\boldsymbol{T}$ en cada punt de $C$, de manera que el camp $p \mapsto \boldsymbol{T}(p)$ sigui continu (només hi ha dues possibilitats)
  - Escriurem $C^+$ i $C^-$ les dues orientacions de la corba (la que "ens interessa" i "l'altra")
  - En general, no hi ha una manera estàndard d'escollir l'orientació $C^+$ (només en casos concrets com quan la corba és la vora o frontera d'un domini de $\mathbb{R}^2$ o d'una superfície de $\mathbb{R}^3$)
  - Una parametrització $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$, de la corba $C$ s'anomena *compatible* amb l'orientació $C^+$ si, en cada punt, el vector tangent unitari $\boldsymbol{T}_\sigma(t) = \dfrac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ és el que correspon a $C^+$

- **Circulació al llarg d'una corba orientada**

  *Def.*: $\displaystyle\int_{C^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \rangle = \int_{\sigma} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \rangle = \int_a^b \langle\, \boldsymbol{F}(\sigma(t)),\ \sigma'(t)\,\rangle\ \mathrm{d}t,$
  essent $\sigma(t)$, $a \le t \le b$, parametrització compatible amb $C^+$

  $$\int_{C^-} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \rangle = -\int_{C^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \rangle$$

- Podem escriure:

  $$\boxed{\int_{C^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \rangle = \int_{C} \langle\, \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{T}_\sigma \,\rangle\, \mathrm{d}\ell}$$

  per a *qualsevol* parametrització $\sigma$ compatible amb l'orientació $C^+$. Notem que $\langle\, \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{T}_\sigma \,\rangle$ és la <u>*component tangencial*</u> de $\boldsymbol{F}$ en cada punt de la corba (és una funció escalar).

- Deduïm de la fórmula anterior que la circulació no depèn de quina parametrització concreta de la corba fem servir, però sí de la seva orientació

# Els teoremes integrals I

**Operadors diferencials**

$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ camp escalar

$\boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_n) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial

[ Usem el símbol "nabla": $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ ]

- *gradient*: $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left( \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$
- *divergència*: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \langle \nabla, \boldsymbol{F} \rangle = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$
- *rotacional (3D)*: si $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \wedge \boldsymbol{F} = (R_y - Q_z\, , \, P_z - R_x\, , \, Q_x - P_y) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

- *rotacional (2D)*: si $\boldsymbol{F} = (P, Q)$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$
- *laplaciana*: $\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

*Obs.*: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \wedge \nabla f \equiv \boldsymbol{0}$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \langle \nabla, \nabla \wedge \boldsymbol{F} \rangle \equiv 0$
(si $f$, $\boldsymbol{F}$ són $\mathcal{C}^2$)

Els teoremes de Newton–Leibniz i de Green ens donen fórmules alternatives per calcular la circulació d'un camp vectorial al llarg d'una corba, que podrem aplicar en determinants casos.

## Camps conservatius

$\boldsymbol{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial (definit en tot un domini $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$)

- En general, la circulació de $\boldsymbol{F}$ entre dos punts depèn de la corba recorreguda entre els punts inicials i final.
- *Def.*: $\boldsymbol{F}$ és *conservatiu* si, donats dos punts $A, B \in \mathcal{U}$, la circulació de $\boldsymbol{F}$ entre $A$ i $B$ no depèn de la corba recorreguda, dins el domini $\mathcal{U}$.

  *Def. equivalent*: $\boldsymbol{F}$ és conservatiu si la circulació al llarg de qualsevol corba tancada continguda en $\mathcal{U}$ és 0.
- *Def.*: $\boldsymbol{F}$ *provó d'un potencial escalar* si $\boldsymbol{F} = \nabla f$ per alguna funció $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que rep el nom de potencial escalar o "primitiva" (si existeix, és únic llevat de constant additiva).

**Teorema de Newton–Leibniz (o del gradient)**

Un camp vectorial $\boldsymbol{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és conservatiu si i només si prové d'un potencial escalar: $\boldsymbol{F} = \nabla f$

Llavors, si $C^+$ corba orientada continguda en $\mathcal{U}$, amb origen al punt $A$ i final al punt $B$,

$$\int_{C^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell} \rangle = f(B) - f(A)$$

- *Interpretació física*: Considerem el sistema d'EDOs $m\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, corresponent a una partícula de massa $m$ que es mou sota el camp de forces $\boldsymbol{F}$.
  Suposant que el camp de forces és conservatiu, escrivim $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ i llavors $U(\boldsymbol{X})$ és l'energia potencial. Tenim:
  - l'energia total $E = \frac{1}{2}m\|\boldsymbol{X}'\|^2 + U(\boldsymbol{X})$ és quantitat conservada;
  - el treball realitzat per $\boldsymbol{F}$ sobre la partícula entre els instants $t_0$ i $t_1$ és $U(\boldsymbol{X}(t_0)) - U(\boldsymbol{X}(t_1))$.

- *Condició necessària* (suposant $\boldsymbol{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$):

$$(\mathbb{R}^2) \quad \text{si } \boldsymbol{F} = (P, Q) \text{ prové d'un potencial escalar} \implies \boxed{P_y = Q_x}$$

$$(\mathbb{R}^3) \quad \text{si } \boldsymbol{F} = (P, Q, R) \text{ prové d'un potencial escalar}$$

$$\implies \boxed{P_y = Q_x,\ P_z = R_x,\ Q_z = R_y}$$

és a dir, $\boldsymbol{F}$ és *irrotacional*: $\boxed{rot\,\boldsymbol{F} \equiv \mathbf{0}}$

- Aquesta condició necessària no és suficient, p.ex. $\boldsymbol{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ compleix que $P_y = Q_x$ però no prové d'un potencial escalar, ja que no és conservatiu (la circulació al llarg d'una circumferència $x^2+y^2=R^2$ és $\neq 0$). *Obs.*: El domini $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de $\boldsymbol{F}$ no és "simplement connex" (té un forat).

- En el cas que el domini $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ sigui simplement connex, la condició és necessària i suficient:

$$\boldsymbol{F} = (P, Q) \text{ prové d'un potencial escalar} \iff P_y = Q_x$$

## Orientació de la frontera d'un domini pla

- Donat un domini $D \subset \mathbb{R}^2$, la seva *frontera* o *vora* $\partial D$ estarà formada per una o més corbes tancades (regulars a trossos): $\partial D = C_1 \cup \cdots \cup C_m$
  - si $D$ és *simplement connex*, és a dir sense forats, la frontera és una única corba tancada (frontera exterior);
  - si $D$ no és simplement connex, la frontera estarà per dues o més corbes tancades (frontera exterior i fronteres interiors).
- Per al domini $D$, l'orientació estàndard o *compatible* $\boxed{\partial D^+}$ de la frontera serà aquella per a la qual cada corba $C_i$ es recorri de manera que l'interior del domini $D$ quedi sempre a mà esquerra (correspon a demanar que el vector tangent a $C_i$ i el vector normal interior a $D$ formin una base directa). Això vol dir:
  - la frontera exterior s'orienta en sentit antihorari
  - les fronteres interiors (si n'hi ha) s'orienten en sentit horari
- Donat un camp vectorial $\boldsymbol{F}$, escriurem:

$$\oint_{\partial D^+} \langle \boldsymbol{F},\, \mathrm{d}\vec{\ell} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i^+} \langle \boldsymbol{F},\, \mathrm{d}\vec{\ell} \rangle$$

**Teorema de Green (o de Green–Riemann, o del rotacional 2D)**

$D \subset \mathbb{R}^2$ domini, amb la frontera $\partial D^+$ orientada de manera compatible.
$\boldsymbol{F} = (P, Q)$ camp vectorial definit a tot $D$ (de classe $\mathcal{C}^1$).
Aleshores,

$$\oint_{\partial D^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- *Obs. 1*: si $\boldsymbol{F}$ és conservatiu, tindrem $Q_x - P_y \equiv 0$
- *Obs. 2*: recordem que $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (0,\, 0,\, Q_x - P_y)$

**Aplicació al càlcul de l'àrea d'un domini pla**

$$\boxed{\mathrm{Area}(D) \;=\; \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} (-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \;=\; -\oint_{\partial D^+} y\,\mathrm{d}x \;=\; \oint_{\partial D^+} x\,\mathrm{d}y}$$

# Integració sobre superfícies

- Superfícies a $\mathbb{R}^3$ (parametritzacions)
- Àrea d'una superfície: $\mathrm{Area}(S) = \int_S \mathrm{d}S$
- Integral d'una funció escalar $f$ sobre una superfície: $\int_S f \,\mathrm{d}S$
- Flux d'un camp vectorial $\boldsymbol{F}$ a través d'una superfície orientada: $\int_{S^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle$

## Superfícies a $\mathbb{R}^3$

- Nocions (informals):
  - superfície *regular*: sense arestes
  - superfície *regular a trossos*: formada per un nombre finit de superfícies regulars, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$, de manera que cada intersecció $S_i \cap S_j$ (si és no buida) estigui formada per corbes regulars a trossos
  - superfície *tancada*: la frontera $S = \partial W$ d'un sòlid o cos $W \subset \mathbb{R}^3$

- Una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ és regular quan admet una <u>*parametrització regular*</u>,

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \end{array}$$

$u$, $v$ són els paràmetres o <u>coordenades</u> sobre $S$

  que compleix:

  - $*$ $D \subset \mathbb{R}^2$ compacte i connex, i tal que la seva frontera $\partial D$ és corba regular a trossos
  - $*$ $S = \Phi(D)$
  - $*$ és de classe $\mathcal{C}^1$
  - $*$ és injectiva (excepte potser a $\partial D$)
  - $*$ $\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v) \neq \mathbf{0}$ per a tot $(u,v) \in \overset{\circ}{D}$ (excepte potser en un nombre finit de punts, anomenats els *'punts singulars'* de la parametrització $\Phi$; la resta són *'punts regulars'*)

- En el cas d'una superfície regular a trossos, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$, considerem per a cada tros $S_i$ una parametrització regular $\Phi_i(u,v)$, $(u,v) \in D_i$.

- Donada una superfície regular $S$, parametritzada per $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in D$, per a cada punt regular $\boxed{p_0=\Phi(u_0,v_0)}$ considerem:
  - les *corbes coordenades* per $p_0$ (corresponents a la parametrització $\Phi$), que són les imatges de
$$u\mapsto\Phi(u,v_0),\qquad v\mapsto\Phi(u_0,v)$$
  - els *vectors tangents* a les corbes coordenades per $p_0$,
$$\Phi_u(u_0,v_0)=(x_u(u_0,v_0),\ y_u(u_0,v_0),\ z_u(u_0,v_0))$$
$$\Phi_v(u_0,v_0)=(x_v(u_0,v_0),\ y_v(u_0,v_0),\ z_v(u_0,v_0))$$
que són linealment independents ja que estem suposant $\Phi_u\wedge\Phi_v\neq\mathbf{0}$ (sobre els punts regulars)
  - $T_{p_0}S=[\,\Phi_u(u_0,v_0)\,,\,\Phi_v(u_0,v_0)\,]$, el *pla tangent* a $S$ en el punt $p_0$
  - $\Phi_u(u_0,v_0)\wedge\Phi_v(u_0,v_0)$, un *vector normal* a $S$ en el punt $p_0$
  - $N_\Phi(u_0,v_0)=\dfrac{\Phi_u(u_0,v_0)\wedge\Phi_v(u_0,v_0)}{\|\Phi_u(u_0,v_0)\wedge\Phi_v(u_0,v_0)\|}$, *vector normal unitari* a $S$ en el punt $p_0$ (n'hi ha dos possibles, associats a les dues orientacions de $S$)

## Exemples de superfícies

- **Cilindre** (de radi $R$ i altura $h$):
  $S = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 = R^2, \ 0 \le z \le h\}$
  $\Phi(\theta, z) = (R\cos\theta, \ R\sin\theta, \ z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h]$
  $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = (R\cos\theta, \ R\sin\theta, \ 0) = (x, y, 0), \quad \|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = R$
- **Con** (de radi $R$ i altura $h$):
  $S = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 = (Rz/h)^2, \ 0 \le z \le h\}$
  $\Phi(\theta, z) = \left(\frac{Rz}{h}\cos\theta, \frac{Rz}{h}\sin\theta, z\right), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h]$
  $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = \left(\frac{Rz}{h}\cos\theta, \ \frac{Rz}{h}\sin\theta, \ -\frac{R^2}{h^2}z\right) = \left(x, \ y, \ -\frac{R^2}{h^2}z\right)$
- **Esfera** (de radi $R$):
  $S = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
  $\Phi(\theta, \varphi) = (R\cos\varphi\,\cos\theta, \ R\cos\varphi\,\sin\theta, \ R\sin\varphi),$
  $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$
  $\Phi_\theta \wedge \Phi_z = R\cos\varphi\,(x, y, z), \quad \|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = R^2\cos\varphi$
- Altres: cilindre el·líptic, el·lipsoide...

## Àrea d'una superfície

- *Def.* : $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, parametritzada per $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in D$

$$\boxed{\mathrm{Area}(S) = \int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v} = \int_S \mathrm{d}S$$

  - *Notació* : $\boxed{\mathrm{d}S = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$ és l'*element de superfície* (o element escalar de superfície)
  - *Obs.* : la fórmula de l'àrea es basa en l'àrea del paral·lelogram generat per dos vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \|\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle \end{vmatrix}}$$

  - *Obs.* : l'àrea no depèn de la parametrització escollida
- Si $S$ és superfície regular a trossos, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$, sumem les àrees de cada tros: $\mathrm{Area}(S) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Area}(S_i)$

- Cas particular 1: una ***gràfica*** a $\mathbb{R}^3$

  Considerem la superfície $S$ definida per $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$

  Es pot parametritzar prenent les coordenades $x, y$ com a paràmetres: $\Phi(x,y) = (x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in D$.

  L'element de superfície és $\boxed{\mathrm{d}S = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$ (i servirà per a d'altres integrals de funcions escalars sobre $S$), i obtenim

  $$\mathrm{Area}(S) = \int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  *Obs.*: Si $\alpha(x,y)$ és l'angle que forma (en cada punt) el vector normal amb la direcció vertical $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$, podem escriure:
  $\mathrm{Area}(S) = \displaystyle\int_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos\alpha(x,y)}$.
  En el cas que $S$ sigui un tros de pla, tindrem $\alpha \equiv \mathrm{const}$ i per tant podem escriure: $\mathrm{Area}(S) = \dfrac{\mathrm{Area}(D)}{\cos\alpha}$ (el domini $D$ és la projeccció de $S$ sobre el pla $xy$)

- Cas particular 2: ***superfície de revolució***
  - Considerem en el pla $xz$ una corba $C$, amb una parametrització $\sigma(t) = (x(t), 0, z(t))$, $a \leq t \leq b$ (en direm *corba generatriu* o *secció*), i suposem que $C$ és corba regular i continguda (preferentment) al semiplà $x > 0$,

$$\sigma'(t) = (x'(t), 0, z'(t)) \neq \mathbf{0}, \quad x(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

  - La *superfície de revolució* $S$, generada en girar la corba $C$ al voltant de l'eix $z$, es pot parametritzar per

$$\Phi(\theta, t) = (x(t)\cos\theta,\ x(t)\sin\theta,\ z(t)), \quad (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$$

  - Corbes coordenades:

$$t = \text{const} \longrightarrow \text{paral·lels}$$
$$\theta = \text{const} \longrightarrow \text{meridians}$$

  - Tenim $\Phi_\theta \wedge \Phi_t = (x(t)z'(t)\cos\theta,\ x(t)z'(t)\sin\theta,\ -x(t)x'(t))$

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| = x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}$$

- L'element de superfície, $\mathrm{d}S = x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t$

- L'àrea,
$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(S) &= \int_D x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

  és a dir,
$$\boxed{\mathrm{Area}(S) = 2\pi \int_C r\,\mathrm{d}\ell}$$

  on $r$ és la distància de cada punt de $C$ a l'eix de gir, i $\mathrm{d}\ell$ és l'element de longitud de $C$.

- De la fórmula anterior, deduïm el ***primer teorema de Guldin*** (o *de Pappus–Guldin*): l'àrea d'una superfície de revolució és

$$\boxed{\mathrm{Area}(S) = \mathrm{long}(C) \cdot 2\pi \bar{r}_C}$$

on $C$ és la corba generatriu, i $\bar{r}_C$ és la distància del centre geomètric de $C$ a l'eix de gir.

- També tenim el ***segon teorema de Guldin***, que ens dóna el volum d'un sòlid de revolució $W$, obtingut en fer girar, al voltant d'un eix, una regió plana $D$ (continguda en un semiplà limitat per l'eix),

$$\boxed{\mathrm{vol}(W) = \mathrm{Area}(D) \cdot 2\pi \bar{r}_D}$$

- Exemple: Àrea d'un *tor* (superfície) i volum d'un *tor sòlid*, generats en girar una circumferència / cercle de radi $r$, amb el centre situat a distància $R$ de l'eix de gir ($r < R$):

$$\mathrm{Area}(S) = 4\pi^2 rR, \qquad \mathrm{vol}(W) = 2\pi^2 r^2 R.$$

### Integral d'una funció escalar sobre una superfície

- *Def.* :
  $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, parametritzada per $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in D$
  $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funció escalar, contínua a trossos

$$\boxed{\int_S f \,\mathrm{d}S = \int_D f(\Phi(u,v)) \, \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

- *Obs.* :
  - si $f \equiv 1$, obtenim l'àrea de $S$
  - la integral d'una funció escalar $f$ sobre $S$ no depèn de la parametrització escollida
  - si $S$ és regular a trossos, $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$, apliquem la definició sobre cada tros i sumem: $\displaystyle\int_S f \,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{r} \int_{S_i} f \,\mathrm{d}S$

- **Aplicacions de les integrals sobre superfícies**

  Ara veurem la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ com una *planxa*, amb una *densitat superficial* de massa donada per una funció $\rho : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$. Aleshores podem calcular:

  - *Massa*
  $$\mathrm{m}(S) = \int_S \rho \, \mathrm{d}S$$
  - *Mitjana* d'una magnitud $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ (p.ex. la temperatura),
  $$\overline{f} = \frac{1}{\mathrm{m}(S)} \int_S f \rho \, \mathrm{d}S$$
  - *Centre de masses*
  $$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\mathrm{m}(S)} \left( \int_S x \rho \, \mathrm{d}S, \int_S y \rho \, \mathrm{d}S, \int_S z \rho \, \mathrm{d}S \right)$$
  - *Moment d'inèrcia* respecte un eix $e$;
  si $r : S \longrightarrow \mathbb{R}$ és la distància de cada punt de $S$ a l'eix $e$,
  $$I_e = \int_S r^2 \rho \, \mathrm{d}S$$

- Aplicacions en el **cas homogeni** d'una planxa de densitat $\rho \equiv \text{const}$,
  - *Massa*
    $$\mathrm{m}(S) = \rho \ \mathrm{Area}(S)$$
  - *Mitjana* d'una magnitud $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$
    $$\overline{f} = \frac{1}{\mathrm{Area}(S)} \int_S f \, \mathrm{d}S$$
  - *Centre geomètric*
    $$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\mathrm{Area}(S)} \left( \int_S x \, \mathrm{d}S, \int_S y \, \mathrm{d}S, \int_S z \, \mathrm{d}S \right)$$
  - *Moment d'inèrcia* respecte un eix $e$
    $$I_e = \rho \int_S r^2 \, \mathrm{d}S$$

## Flux d'un camp vectorial a través d'una superfície

- *Def.* :
  $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, parametritzada per $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in D$
  $\boldsymbol{F} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ camp vectorial, continu a trossos
  El *flux* de $\boldsymbol{F}$ a través de $S$, segons la parametrització $\Phi$, és

$$\boxed{\int_{\Phi} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle = \int_{D} \langle \boldsymbol{F}(\Phi(u,v)),\ \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

  - *Notació* : $\boxed{\mathrm{d}\vec{S} = \Phi_u \wedge \Phi_v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$ és el *vector diferencial de superfície* (o element vectorial de superfície)
  - si $S$ és regular a trossos, apliquem la definició sobre cada tros i sumem

- Una altra notació:
  - Si $S$ és superfície tancada (és a dir, la frontera $S = \partial W$ d'un sòlid $W \subset \mathbb{R}^3$), escrivim $\displaystyle\oint_\Phi \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle$

- *Interpretació del flux*:

  Si $\boldsymbol{F}$ camp de velocitats d'un fluid, el flux $\displaystyle\int_\Phi \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle$ correspon a la quantitat de fluid que travessa $S$, per unitat de temps, en el sentit indicat pel vector normal $\Phi_u \wedge \Phi_v$:
  - mateix sentit si $\langle\, \boldsymbol{F}(\Phi(u,v)),\ \Phi_u \wedge \Phi_v\,\rangle > 0$ (angle agut)
  - sentit contrari si $\langle\, \boldsymbol{F}(\Phi(u,v)),\ \Phi_u \wedge \Phi_v\,\rangle < 0$ (angle obtús)

  *Obs.*: Si $\boldsymbol{F}$ és tangent a la superfície $S$ (és a dir, ortogonal al vector normal $\Phi_u \wedge \Phi_v$) en tot punt, el flux és 0.

- **Orientació d'una superfície**
  - Una superfície $S$ té (si és orientable) dues possibles orientacions, que corresponen als dos sentits amb què podem travessar $S$
  - Per definir-ho, escollim (si és possible) un vector normal unitari $\boldsymbol{N}$ en cada punt de $S$, de manera que el camp $p \to \boldsymbol{N}(p)$ sigui continu:
    - ⋆ $S$ és *orientable* si podem escollir $\boldsymbol{N}$ de manera contínua a tota la superfície, i en aquest cas només hi ha dues possibilitats, que ens donen les dues possibles *orientacions* de la superfície; escriurem $S^+$ i $S^-$ les dues orientacions de la superfície (la que "ens interessa" i "l'altra")
    - ⋆ $S$ és no orientable si no podem escollir $\boldsymbol{N}$ de manera contínua a tota la superfície (exemple: la cinta de Möbius)

- Si $S$ és orientable, en general no hi ha una manera estàndard d'escollir l'orientació $S^+$ (només en casos concrets com quan la superfície és tancada)
- Quan hem escollit una orientació $S^+$, també hem definit altres conceptes:
  - la cara superior i inferior de la superfície
  - un sentit de gir positiu sobre la superfície
- Una parametrització $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$, de la superfície $S$ s'anomena *compatible* amb l'orientació $S^+$ si, en cada punt, el vector normal unitari $\boldsymbol{N}_\Phi(u, v) = \dfrac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$ és el que correspon a $S^+$

- **Flux a través d'una superfície orientada**

  *Def.*: $\displaystyle\int_{S^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle = \int_{\Phi} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle = \int_D \langle\, \boldsymbol{F}(\Phi(u,v)),\ \Phi_u \wedge \Phi_v \,\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$
  essent $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in D$, parametrització compatible amb $S^+$

  $$\int_{S^-} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle = -\int_{S^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle$$

- Podem escriure:

  $$\boxed{\int_{S^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle = \int_S \langle\, \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{N}_\Phi \,\rangle \,\mathrm{d}S}$$

  per a *qualsevol* parametrització $\Phi$ compatible amb l'orientació $S^+$. Notem que $\langle\, \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{N}_\Phi \,\rangle$ és la <u>*component normal*</u> de $\boldsymbol{F}$ en cada punt de la superfície (és una funció escalar).

- Deduïm de la fórmula anterior que el flux no depèn de quina parametrització concreta de la superfície fem servir, però sí de la seva orientació.

# Els teoremes integrals II

Els teoremes de Gauss i de Stokes, com el teorema de Green, estableixen igualtats entre integrals de diferents tipus, proporcionant fórmules alternatives per a calcular-les.

**Orientació de la frontera d'un sòlid**

- Donat un sòlid o cos $W \subset \mathbb{R}^3$, la seva *frontera* $\partial W$ estarà formada per una o més superfícies tancades (regulars a trossos): $\partial W = S_1 \cup \cdots \cup S_m$.
- Per al sòlid $W$, l'orientació estàndard $\boxed{\partial W^+}$ de la frontera serà la que ve donada pel vector *normal exterior* a $W$.
- Donat un camp vectorial $\boldsymbol{F}$, escriurem:

$$\oint_{\partial W^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle$$

(és el *flux sortint* de $W$).

## Camps solenoidals

- En general, el flux de $\boldsymbol{F}$ a través d'una superfície tancada no és 0, és a dir, la sortida de flux pot ser superior o inferior a l'entrada.
- *Def.*: Un camp vectorial $\boldsymbol{F}$ definit en una regió $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ és *solenoidal* si $\operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv 0$.
- Si $\boldsymbol{F}$ és solenoidal, el teorema de Gauss ens dirà que el flux a través de qualsevol superfície tancada $S = \partial W$ (amb $W \subset \mathcal{U}$) és 0, és a dir, la sortida de flux s'equilibra amb l'entrada. En el cas d'un camp de velocitats, estem parlant d'un *fluid incompressible*.
- De manera equivalent, per a un fluid incompressible que circula dins un *tub* (sense flux a les parets), el flux a través de dues seccions orientades en el mateix sentit coincideix.

**Teorema de Gauss (o de la divergència)**

$W \subset \mathbb{R}^3$ sòlid, amb la frontera $\partial W^+$ orientada per la normal exterior.
$\boldsymbol{F}$ camp vectorial definit a $W$ (de classe $\mathcal{C}^1$).
Aleshores,

$$\oint_{\partial W^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle = \int_W \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

- *Obs. 1*: si $\boldsymbol{F}$ és solenoidal, deduïm $\oint_{\partial W^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle = 0$.
- *Obs. 2*: si $\operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv k$ (const.), deduïm $\oint_{\partial W^+} \langle \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle = k \operatorname{vol}(W)$.

## Aplicació al càlcul del volum d'un sòlid

$$\boxed{\operatorname{vol}(W) \ = \ \frac{1}{3} \oint_{\partial W^+} \langle \boldsymbol{r},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle}$$

Ho deduïm del fet que el camp $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ té divergència constant: $\operatorname{div} \boldsymbol{r} \equiv 3$. També podem usar qualsevol dels camps $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$, que tenen divergència constant $\equiv 1$.

## Orientació de la vora d'una superfície

- Donada una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ (<u>no tancada</u>), la seva *vora* (o *frontera*) $\partial S$ estarà formada per una o més corbes tancades (regulars a trossos): $\partial S = C_1 \cup \cdots \cup C_m$
- Suposem donada una orientació $\boxed{S^+}$ de la superfície (és a dir, un vector normal unitari $\boldsymbol{N}$ en cada punt). L'orientació de la vora <u>*compatible*</u> amb $S^+$, que escriurem $\boxed{\partial S^+}$, serà aquella per a la qual, situant-nos a la cara de $S$ determinada per $\boldsymbol{N}$ (la "cara superior"), cada corba $C_i$ es recorri de manera que la superfície quedi sempre a mà esquerra.
- Recíprocament, una orientació $\partial S^+$ de la vora determina una orientació compatible $S^+$ de la superfície.
- Donat un camp vectorial $\boldsymbol{F}$, escriurem:

$$\oint_{\partial S^+} \langle \boldsymbol{F},\, \mathrm{d}\vec{\ell} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i^+} \langle \boldsymbol{F},\, \mathrm{d}\vec{\ell} \rangle$$

**Teorema de Stokes (o del rotacional 3D)**

Considerem a $\mathbb{R}^3$ una superfície orientada $S^+$,
amb la seva vora $\partial S^+$ orientada de manera compatible.
$\boldsymbol{F}$ camp vectorial definit a $S$ (de classe $\mathcal{C}^1$).

Aleshores,

$$\oint_{\partial S^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\,\rangle = \int_{S^+} \langle\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{S}\,\rangle$$

- *Obs. 1*: si el camp $\boldsymbol{F}$ és irrotacional ($\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} \equiv \mathbf{0}$), deduïm que $\oint_{C^+} \langle\, \boldsymbol{F},\ \mathrm{d}\vec{\ell}\,\rangle = 0$ per a qualsevol corba tancada $C$ que sigui vora d'una superfície continguda al domini de $\boldsymbol{F}$.
- *Obs. 2*: En el cas particular d'un camp vectorial de la forma $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ i una superfície donada per un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ sobre el pla $z = 0$ (orientat per $\boldsymbol{N} = (0, 0, 1)$), obtenim el teorema de Green.

- **Càlcul d'un flux a partir d'un potencial vector**
  - El teorema de Stokes ens permet calcular una circulació a partir d'un flux. Ara ens preguntem si és possible el procés invers: calcular el flux d'un camp vectorial $\boldsymbol{G}$ a través d'una superfície orientada $S^{+}$, com una circulació al llarg de la seva vora $\partial S^{+}$.
  - *Def.*: Un camp $\boldsymbol{G}$ definit a $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ *provè d'un potencial vector* si $\boldsymbol{G} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$ per algun camp vectorial $\boldsymbol{H}$ (definit a tot $\mathcal{U}$), que rep el nom de potencial vector (si existeix, no és únic ja que podem sumar-hi qualsevol camp irrotacional).
  - Si $\boldsymbol{G}$ té un potencial vector $\boldsymbol{H}$, pel teorema de Stokes podem escriure: $\displaystyle\int_{S^{+}} \langle \boldsymbol{G},\ \mathrm{d}\vec{S} \rangle = \oint_{\partial S^{+}} \langle \boldsymbol{H},\ \mathrm{d}\vec{\ell} \rangle$.
  - No tot camp vectorial $\boldsymbol{G}$ admet un potencial vector: una *condició necessària* és que $\boldsymbol{G}$ sigui solenoidal $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{G} \equiv 0)$, com a conseqüència de la identitat $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}) \equiv 0$ (si $\boldsymbol{H}$ és $\mathcal{C}^2$).
  - Exemple: Un camp vectorial constant $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ té com a potencial vector $\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{G} \wedge \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}(v_2 z - v_3 y,\ v_3 x - v_1 z,\ v_1 y - v_2 x)$.