Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs)

Pere Gutiérrez

Novembre 2021

Sistemes d'EDOs (conceptes i teoremes generals)

- EDO: una relació entre una funció (incògnita) d'una variable i algunes de les seves derivades.

  EDP: ídem amb funció de 2 o més variables.

- Exemples:
  - $x'' + x = \cos 2t$, EDO per a $x(t)$
    Una de les solucions és $x(t) = \cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$
    (*Nota*: usualment escriurem $x(t)$ i no $y(x)$, però $y'' + y = \cos 2x$ és la mateixa EDO.)
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, EDP per a $u(x, y)$.
    Una de les solucions és $u(x, y) = x^2 - y^2$.

- L'*ordre* d'una EDO (o EDP) és l'ordre de derivada més alt que hi apareix.

EDOs de primer ordre

- Forma general: $g(t,x,x')=0$, essent $g : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funció donada.
  Forma normalitzada: $x' = f(t,x)$, essent $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funció donada.

- Si afegim una *condició inicial* (CI), tenim un *problema de valor inicial* (PVI, o problema de Cauchy): $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
  En general, una EDO de primer ordre té infinites solucions, depenent d'un paràmetre (*solució general*) i, afegint una CI, el PVI té una única solució (teorema d'existència i unicitat: caldrà l'EDO en forma normalitzada i que f sigui de classe $\mathcal{C}^1$).

- Exemple: $\begin{cases} x' = -2tx^2 \\ x(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$
  La solució general de l'EDO és $x(t) = \dfrac{1}{t^2-c}$, $c \in \mathbb{R}$. Imposant la CI resulta $c=2$, i la solució del PVI és $x(t) = \dfrac{1}{t^2-2}$.

EDOs de segon ordre

- Forma general: $g(t, x, x', x'') = 0$, essent $g : D \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Forma normalitzada: $x'' = f(t, x, x')$, essent $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
- En aquest cas, a la solució general apareixen 2 paràmetres, i per tenir una única solució cal considerar un PVI on imposem 2 CIs, de la forma:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0.$$

- Exemple: $\begin{cases} x'' + x = \cos 2t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = -3 \end{cases}$
  La solució general és $x(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Imposant les CIs obtenim $c_1 = 7/3$, $c_2 = -3$, i per tant la solució del PVI és $x(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t + \frac{7}{3}\cos t - 3\sin t$.

EDOs d'ordre *n*

- Forma normalitzada: $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$
  - La solució general depèn de *n* paràmetres
  - Per tenir una única solució, cal considerar un PVI imposant *n* CIs, sobre $x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$.

Equacions de la mecànica

- El cas d'una EDO de segon ordre és important, ja que les EDOs associades a la mecànica es plantegen sovint a partir de la segona llei de Newton:

$$\text{massa} \, * \, \text{acceleració} \, = \sum \text{forces}$$

- Les CIs corresponen en aquest cas a fixar la posició i velocitat inicials (determinisme de les lleis de la mecànica).

- Exemple 1: **equació del paracaigudista**

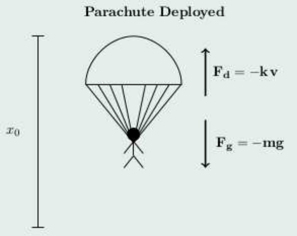
  $x(t)$: alçada respecte el terre
  $v(t) = x'(t)$: velocitat (negativa si baixa)

  EDO:

$$m\,x'' = \underbrace{-mg}_{\text{pes}}\ \underbrace{-\beta\,x'}_{\text{fricció}}$$

  CIs:

$$x(0) = x_0 \quad \text{(posició inicial)}$$
$$x'(0) = 0 \quad \text{(velocitat inicial)}$$



- Exemple 2: **equació de la molla**

$x(t)$: desplaçament horitzontal respecte la posició d'equilibri

EDO:

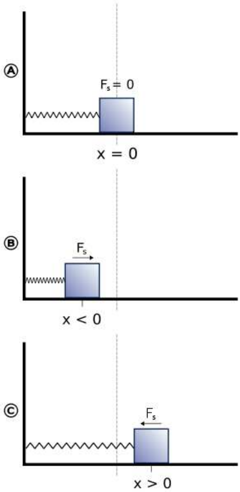
- oscil·lacions harmòniques (sense fricció):

$$m\,x'' = -k\,x \quad \text{(llei de Hooke)}$$

- oscil·lacions esmorteïdes (amb fricció, $\beta > 0$):

$$m\,x'' = -k\,x - \beta\,x'$$

CIs: $x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$



Sistemes d'EDOs (de primer ordre)

$$\boxed{\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}} \iff \boxed{\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X})}$$

(notació vectorial)

- t, variable independent (sovint, el temps)
- $\boldsymbol{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, funcions incògnites o variables dependents
- $\boldsymbol{F} = (f_1, \dots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, funció vectorial que defineix el sistema

- Per formular un PVI, afegim una CI per a cada funció incògnita,

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}} \iff \boxed{\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0}$$

- $(t_0, \boldsymbol{X}^0) = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ donats

- **Cas 2D** $(n = 2)$
  Escriurem $\boldsymbol{F} = (P, Q)$, $\boldsymbol{X}(t) = (x(t), y(t))$ i $\boldsymbol{X}^0 = (x_0, y_0)$,

$$\text{EDOs} \quad \begin{cases} x' = P(t, x, y) \\ y' = Q(t, x, y) \end{cases} \qquad \text{CIs} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

  - Exemple:

$$\begin{cases} x' = tx + t^3 y + \sin t \\ y' = ty^2 + \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1) = -1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

    definit per $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}(t, x, y) = (tx + t^3 y + \sin t,\ ty^2 + \cos x)$, $(t_0, \boldsymbol{X}^0) = (t_0, x_0, y_0) = (1, -1, 3)$.

- **Cas 3D** $(n = 3)$
  Escriurem $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, $\boldsymbol{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ i $\boldsymbol{X}^0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Relació entre EDOs d'ordre superior i sistemes de primer ordre

- Una EDO de segon ordre es pot reescriure com un sistema de 2 EDOs de primer ordre, escollint $y = x'$ com a segona funció incògnita del sistema.

$$x'' = f(t, x, x') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = y, \\ y' = f(t, x, y) \end{cases}$$

  Això vol dir:

$$x(t) \text{ solució de l'EDO} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{X}(t) = (x(t), x'(t)) \text{ solució del sistema}$$

- Si tenim CIs $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$ de l'EDO, es reescriuen com a $\boldsymbol{X}(t_0) = (x_0, x_0')$.
- Exemple:

$$\begin{cases} x'' + x = \cos 2t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = -3 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \cos 2t \\ x(0) = 2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

- Anàlogament una EDO d'ordre n es pot reescriure com un sistema de n EDOs de primer ordre. Escollint $x_1 = x, x_2 = x', \ldots, x_n = x^{(n-1)}$ com a funcions incògnita del sistema,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

I les CIs,

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_0' \\ \quad \cdots\cdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = (x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)})$$

Teorema d'existència i unicitat. Suposant $\boldsymbol{F} : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ i donat $(t_0, \boldsymbol{X}^0) \in \overset{\circ}{A}$, aleshores el PVI $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0 \end{array} \right.$ té una única solució local $\boldsymbol{X}(t)$

- *solució local* vol dir: definida en un interval $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ per algun $\alpha > 0$ prou petit

Exemples / **Observacions** (en EDOs de primer ordre):

- $\left\{ \begin{array}{l} x' = -2tx^2 \\ x(0) = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ té la solució $x(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2}$, definida per a $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, malgrat que $f(t, x) = -2tx^2$ és definida a tot $\mathbb{R}^2$ (la solució "s'acaba" quan arriba a ∞).

- $\left\{\begin{array}{l} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{array}\right.$ no té solució única: $x^{(1)}(t) = \dfrac{t^3}{27}$ i $x^{(2)}(t) = 0$ (i d'altres) són solució (notem que $f(t,x) = x^{2/3}$ no és $\mathcal{C}^1$).

- $\left\{\begin{array}{l} t\,x' = x \\ x(0) = 0 \end{array}\right.$ té infinites solucions: $x(t) = k\,t$, amb qualsevol $k \in \mathbb{R}$. Si normalitzem l'equació obtenim la funció $f(t,x) = x/t$, no definida al punt $(0,0)$.

Sistemes autònoms i camps vectorials

- Un sistema d'EDOs s'anomena *autònom* si el temps t no hi apareix explícitament: $\boxed{\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}$

  Vindrà definit per un *camp vectorial* (que hem de suposar de classe $\mathcal{C}^1$),

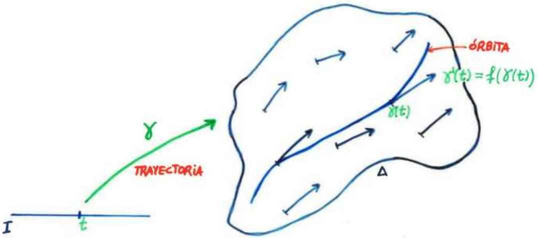
$$\boldsymbol{F} : \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{punts}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{vectors}}$$

- Podem veure cada solució com una *corba regular parametritzada* $\boldsymbol{X}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ t \in I$.

- *Interpretació geomètrica*: En cada punt d'una solució o *trajectòria* $\boldsymbol{X}(t)$, el vector tangent ha de coincidir amb el camp vectorial:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)), \qquad \forall t \in I.$$

  El conjunt recorregut per una trajectòria rep el nom d'*òrbita* (la corba com a objecte geomètric).



- *Interpretació física*: Pensant en $\boldsymbol{F}$ com un camp de velocitats, cada solució $\boldsymbol{X}(t)$ correspondria a un possible moviment d'una partícula que es mou segons aquest camp.

- En el cas d'un sistema no autònom $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X})$, hauríem de considerar un camp vectorial depenent del temps (els vectors "es mouen").

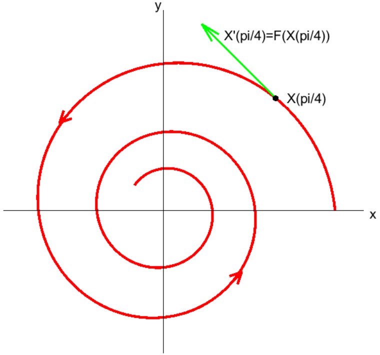
Exemple. El sistema autònom 2D

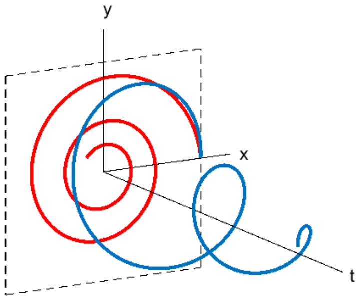
$$x' = -x - y, \qquad y' = x - y$$

ve donat pel camp vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (-x - y,\, x - y)$.
Una de les seves trajectòries és

$$\boldsymbol{X}(t) = (x(t), y(t)) = (\mathrm{e}^{-t}\cos t,\, \mathrm{e}^{-t}\sin t),$$

que podem representar com una corba parametritzada a $\mathbb{R}^2$. Aquesta corba és la projecció, sobre el pla de coordenades x, y, de la seva gràfica a l'espai de coordenades t, x, y.





- **Dues propietats** importants dels sistemes autònoms :
  - Donada una trajectòria $\boldsymbol{X}(t)$, tota *translació* en el temps $\boldsymbol{X}(t - t^*)$ és també una altra trajectòria, que recorre la mateixa òrbita.
  - Per cada punt del domini $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{F}$ passa *una única òrbita*, ja que si dues trajectòries $\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$ i $\boldsymbol{X}^{(2)}(t)$ passen per un mateix punt en instants t_1 i t_2, llavors una serà translació en el temps de l'altra, separades un interval de temps $t^* = t_2 - t_1$ (aquí s'ha aplicat el teorema d'existència i unicitat).

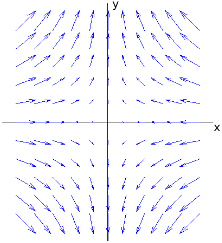
Així doncs, quan plantegem un PVI en un sistema autònom, a la pràctica podem restringir-nos a l'instant $t_0 = 0$ quan imposem una condició inicial:

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}^0.$$

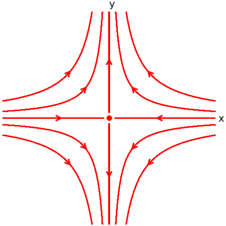
- El dibuix o representació de totes les òrbites d'un sistema autònom sobre el domini $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{F}$ rep el nom de *retrat de fase* del sistema.

  Per determinar-lo, caldria trobar les solucions del sistema (analíticament o numèricament), però si representem el camp vectorial en una bona xarxa de punts podem tenir una idea aproximada del retrat de fase.

  Exemple: $\boldsymbol{F}(x, y) = (-x, y)$



camp vectorial



retrat de fase

Trajectòries: $(x(t), y(t)) = (x_0\,\mathrm{e}^{-t}, y_0\,\mathrm{e}^{t})$
Òrbites: branques d'hipèrbola $xy = \mathrm{const}$, quatre semirectes i l'origen

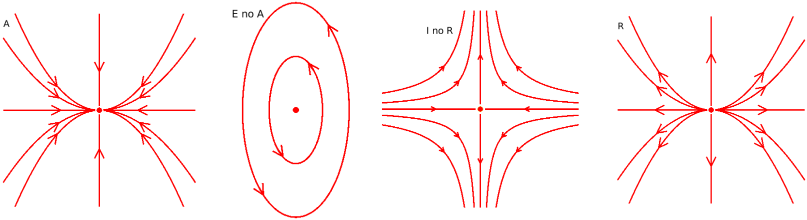
Punts d'equilibri i estabilitat

- $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ sistema autònom, amb $\boldsymbol{F}$ camp vectorial sobre un domini $\mathcal{U}$.
  Def. : Un <u>*punt d'equilibri*</u> és qualsevol punt $\boldsymbol{X}^0 \in \mathcal{U}$ on el camp vectorial s'anul·li: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0) = \mathbf{0}$.
  Això equival a demanar que el sistema té la solució constant $\boldsymbol{X}(t) \equiv \boldsymbol{X}^0$, és a dir, l'òrbita per $\boldsymbol{X}^0$ està formada només per aquest punt.

- Ens proposem ara d'establir diferents tipus o categories de punts d'equilibri $\boldsymbol{X}^0$, segons la seva <u>*estabilitat*</u> : estudiant el comportament de les trajectòries $\boldsymbol{X}(t)$ amb condicions inicials properes a $\boldsymbol{X}^0$, per a $\underline{t > 0}$ (si s'apropen a $\boldsymbol{X}^0$, o si se n'allunyen, o si es mantenen a prop. . .).

- *Definicions (informals)*. El punt d'equilibri $\boldsymbol{X}^0$ és:
  - *estable (E)* si tota trajectòria $\boldsymbol{X}(t)$ amb CI prou propera a $\boldsymbol{X}^0$, es manté prop de $\boldsymbol{X}^0$ per a tot $t > 0$;
  - *inestable (I)* si no és estable, és a dir, hi ha trajectòries amb CI tan propera com vulguem a $\boldsymbol{X}^0$, que s'allunyen de $\boldsymbol{X}^0$;
  - *atractor (A)* o *asimptòticament estable*, si tota trajectòria $\boldsymbol{X}(t)$ amb CI prou propera a $\boldsymbol{X}^0$, tendeix a $\boldsymbol{X}^0$ quan $t \to \infty$;
  - *repulsor (R)* si és atractor per al sistema $\boldsymbol{X}' = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, i llavors tota trajectòria $\boldsymbol{X}(t)$ amb CI prou propera a $\boldsymbol{X}^0$, s'allunya de $\boldsymbol{X}^0$ (excepte el propi $\boldsymbol{X}^0$).
- Cada punt d'equilibri pertany a una única de les categories següents:
  - atractor (A)
  - estable no atractor (E no A)
  - inestable no repulsor (I no R)
  - repulsor (R)

- Exemples de retrats de fase amb un punt d'equilibri que pertany a cadascuna de les categories:



Òrbites periòdiques

- $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ sistema autònom, amb $\boldsymbol{F}$ camp vectorial sobre un domini $\mathcal{U}$.

  Obs.: Si una trajectòria $\boldsymbol{X}(t)$ compleix que $\boldsymbol{X}(T) = \boldsymbol{X}(0)$ per algun $T > 0$ (és a dir, torna a passar pel punt inicial), aleshores és T-periòdica: $\boldsymbol{X}(t+T) = \boldsymbol{X}(t)$ per a tot t.

- En aquest cas (i suposant que no es tracti d'un punt d'equilibri), l'òrbita recorreguda és una corba tancada, i rep el nom d'*òrbita periòdica*.

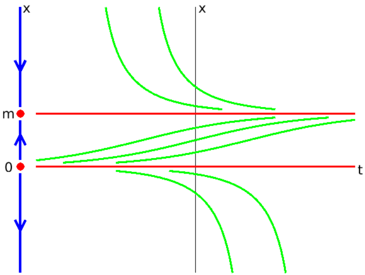
Cas d'una EDO autònoma de primer ordre

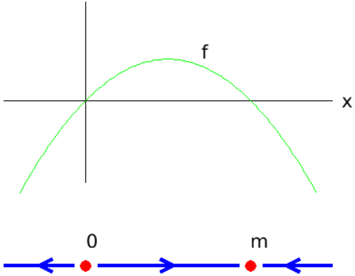
- Els sistemes autònoms poden ser 2D, 3D... però també *1D*. Aquest és el cas més simple i en farem un estudi complet.

- Una *EDO autònoma de primer ordre* : $\boxed{x' = f(x)}$
  - el "camp vectorial" $f(x)$ és una funció escalar d'una variable, de classe $\mathcal{C}^1$, definida en un interval $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$;
  - les solucions o trajectòries són funcions escalars $x(t)$;
  - les òrbites i el retrat de fase es dibuixaran sobre la recta $\mathbb{R}$.

- *Observacions*.
  - Els punts d'equilibri són els zeros de la funció $f(x)$.
  - No hi ha òrbites periòdiques.
  - La resta d'òrbites seran intervals de $\mathbb{R}$ (o eventualment semirectes, o la recta sencera), i són la imatge o recorregut de solucions $x(t)$.
  - Podríem trobar les solucions resolent l'EDO, que és *separable*: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = t + C$, i aïllant $x = x(t)$ (però no caldrà fer això per trobar les òrbites).

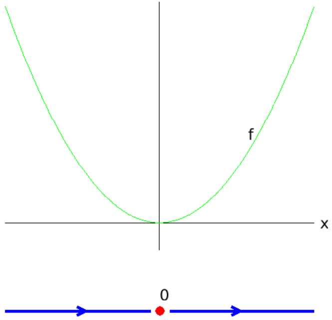
- **Exemple 1.** EDO $\boxed{x' = kx(1 - x/m)}$ amb $k, m > 0$ donats (*equació logística*). Ve definida per la funció $f(x) = kx(1 - x/m)$.
  - Punts d'equilibri: 0, m (els zeros de f).
  - La resta de solucions: $x(t) = \dfrac{m\, x_0\, \mathrm{e}^{kt}}{m + x_0(\mathrm{e}^{kt} - 1)}$ (que no cal trobar).
  - Projectant les gràfiques de les solucions sobre l'eix vertical x veiem que el retrat de fase està format per 5 òrbites: els punts d'equilibri 0 i m, l'interval $(0, m)$ i les semirectes $(-\infty, 0)$ i (m, ∞).
  - També veiem en quin sentit es recorren aquestes òrbites, deduint que 0 i m són punts d'equilibri <u>repulsor</u> i <u>atractor</u>, respectivament.





- En general, donat un punt d'equilibri x_0,
  - si $f'(x_0) < 0$, el punt x_0 és <u>atractor</u>;
  - si $f'(x_0) > 0$, el punt x_0 és <u>repulsor</u>;
  - si $f(x)$ passa de positiva a negativa en x_0, el punt x_0 és <u>atractor</u> (fins i tot si $f'(x_0) = 0$);
  - si $f(x)$ passa de negativa a positiva en x_0, el punt x_0 és <u>repulsor</u> (fins i tot si $f'(x_0) = 0$);
  - si $f(x)$ és positiva a esquerra i dreta de x_0, o negativa a esquerra i dreta de x_0, el punt x_0 és <u>inestable no repulsor</u>.
- Més coses:
  - Les òrbites que no són punts d'equilibri són els intervals entre dos punts d'equilibri consecutius, i les semirectes entre $-\infty$ i el primer punt d'equilibri, i entre el darrer punt d'equilibri i ∞.
  - Qualsevol solució $x(t)$ que prové o tendeix a un punt d'equilibri ho fa en un temps infinit. En canvi, una solució que prové o tendeix a $\pm\infty$ ho pot fer en un temps finit o infinit.

- **Exemple 2.** EDO $\boxed{x' = x^2}$, que ve definida per la funció $f(x) = x^2$.
  - Punts d'equilibri: només el 0, que és inestable no repulsor (de fet, podem dir que és "atractor per l'esquerra i repulsor per la dreta").
  - El retrat de fase té 3 òrbites: el punt d'equilibri 0, i les semirectes $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ ambdues recorregudes cap a la dreta.



Sistemes lineals: resolució

EDO lineal de primer ordre: $\boxed{x' = a(t)x + b(t)}$

($a(t)$, $b(t)$ funcions donades)

- Cas homogeni ($b(t) \equiv 0$):
  - solució general $x_{\mathrm{h}}(t) = c\, x_1(t)$, $c \in \mathbb{R}$, essent $x_1(t) = \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}$
- Cas no homogeni ($b(t) \not\equiv 0$):
  - comencem resolent la part homogènia $x' = a(t)x$
  - si coneixem alguna solució particular $x_{\mathrm{p}}(t)$ de l'EDO no homogènia, la solució general serà $x(t) = x_{\mathrm{p}}(t) + x_{\mathrm{h}}(t)$
  - per trobar una solució particular, podem usar el mètode de variació de constant: $x_{\mathrm{p}}(t) = u(t)\, x_1(t)$, essent $u(t) = \displaystyle\int \frac{b(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t$.

Sistemes d'EDOs lineals

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{array}\right. \iff \boxed{\boldsymbol{X}' = A(t)\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}(t)}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{\text{funcions incògnita}}, \quad \underbrace{A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{\text{matriu de coeficients}}, \quad \underbrace{\boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}}_{\text{termes independents}}$$

essent $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ funcions donades, $t \in I$.

- en el cas de sistemes lineals, les solucions estan definides a tot l'interval I (no cal parlar de 'solucions locals')

Tipus de sistemes lineals

- Coeficients constants / variables:
  - a coeficients constants si $A(t) \equiv \mathrm{const}$
    (es poden resoldre usant valors i vectors propis, formes de Jordan)
  - a coeficients variables si $A(t) \not\equiv \mathrm{const}$
    (en general no es poden resoldre explícitament, si $n \geq 2$)
- Homogeni / No homogeni:
  - homogeni (H) si $\boldsymbol{B}(t) \equiv \mathbf{0}$
  - no homogeni (NH) si $\boldsymbol{B}(t) \not\equiv \mathbf{0}$
    (si podem resoldre la part homogènia, també podrem resoldre el sistema no homogeni)

EDOs lineals de segon ordre

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

suposant $a_i(t)$, $b(t)$ donades, amb $a_2(t) \neq 0,\ t \in I$.
Una EDO lineal de segon ordre es pot reescriure com un sistema lineal 2D:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\dfrac{a_0(t)}{a_2(t)}\,x - \dfrac{a_1(t)}{a_2(t)}\,y + \dfrac{b(t)}{a_2(t)} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_2(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(t)}{a_2(t)} \end{pmatrix}$$

EDOs lineals d'ordre n

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

es pot reescriure com un sistema lineal, amb $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & & \cdots & & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}.$$

Estructura de les solucions

- Cas homogeni: $\boldsymbol{X}' = A(t)\,\boldsymbol{X}$ (de dimensió n)
  - Les solucions formen un espai vectorial:
    si $\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{X}^{(2)}(t)$ solucions, llavors qualsevol combinació lineal
    $c_1\boldsymbol{X}^{(1)}(t) + c_2\boldsymbol{X}^{(2)}(t)$ és solució (*principi de superposició*)
  - Aquest espai vectorial té dimensió n, i tota base $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \dots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t)$ rep el nom de *conjunt fonamental de solucions*:
    - ★ (linealment independents)
      si $c_1\boldsymbol{X}^{(1)}(t) + \ldots + c_n\boldsymbol{X}^{(n)}(t) \equiv \mathbf{0}$, llavors $c_1 = \cdots = c_n = 0$
    - ★ (generadors) la *solució general* és

$$\boxed{\boldsymbol{X}(t) = c_1\boldsymbol{X}^{(1)}(t) + \ldots + c_n\boldsymbol{X}^{(n)}(t)} \quad \text{amb } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

- Cas no homogeni (**NH**): $\boldsymbol{X}' = A(t)\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}(t)$
  - si $\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{X}^{(2)}(t)$ solucions, llavors la diferència $\boldsymbol{X}^{(1)}(t) - \boldsymbol{X}^{(2)}(t)$ és solució de la part homogènia (**H**): $\boldsymbol{X}' = A(t)\,\boldsymbol{X}$
  - per tant, si coneixem una solució particular $\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t)$ de (NH), llavors podem escriure

$$\underbrace{\boldsymbol{X}(t)}_{\text{sol. gen. (NH)}} = \underbrace{\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t)}_{\text{sol. partic. (NH)}} + \underbrace{\boldsymbol{X}_{\mathrm{h}}(t)}_{\text{sol. gen. (H)}}$$

  - per trobar una solució particular $\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t)$ de (NH), podem usar qualsevol mètode, com per exemple el *mètode de variació de constants* (funciona sempre que haguem pogut resoldre (H))

Matrius fonamentals

Considerem un sistema homogeni $\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X}$ (de dimensió n)

- *Obs.*: si $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(k)}(t)$ són solucions del sistema, llavors la matriu $\Phi(t)$ $(n \times k)$ que té aquestes k solucions com a columnes n'és una *"solució matricial"*, $\boxed{\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)}$ $\forall t$.
- *Def.* : donat un conjunt fonamental $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t)$, la matriu $\Phi(t)$ $(n \times n)$ que té aquestes n solucions com a columnes s'anomena una *matriu fonamental* del sistema.
- Si $\Phi(t)$ és matriu fonamental, la solució general ve donada per

$$\boxed{\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{C}} \quad \text{amb } \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ vector de constants arbitrari.}$$

- Relació entre dues matrius fonamentals $\Phi(t)$, $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \Phi(t)\,M$$

on M és una matriu $n \times n$ amb $\det M \neq 0$ (matriu de canvi de base entre els conjunts fonamentals associats a $\Phi(t)$ i $\Psi(t)$).

Wronskià

Considerem un sistema homogeni $\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X}$, $t \in I$ (de dimensió n)

- *Obs.*: Siguin $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(k)}(t)$ solucions, i un $t_0 \in I$ fixat. Aleshores,

$$\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(k)}(t) \text{ són solucions linealment independents}$$
$$\iff \boldsymbol{X}^{(1)}(t_0), \ldots, \boldsymbol{X}^{(k)}(t_0) \text{ són vectors de } \mathbb{R}^n \text{ linealment independents}$$

  I en aquest cas, per a qualsevol altre $t_1 \in I$ els vectors $\boldsymbol{X}^{(1)}(t_1), \ldots, \boldsymbol{X}^{(k)}(t_1)$ seran també linealment independents.

- Suposem ara $k = n$. Deduïm:

$$\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t) \text{ són un conjunt fonamental de solucions}$$
$$\iff \boldsymbol{X}^{(1)}(t_0), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t_0) \text{ són una base de } \mathbb{R}^n$$

  I en aquest cas, per a qualsevol altre $t_1 \in I$ els vectors $\boldsymbol{X}^{(1)}(t_1), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t_1)$ seran també una base de $\mathbb{R}^n$.
  (Això es pot comprovar amb el determinant.)

- Donades n solucions $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t)$, definim el seu *wronskià* com la funció

$$\boxed{W(t) = W[\boldsymbol{X}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}](t) = \det \Phi(t)}$$

on $\Phi(t)$ és la solució matricial $(n \times n)$ que les té com a columnes. Llavors tenim:

$$\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t) \text{ és conjunt fonamental} \iff W(t_0) \neq 0$$

i, en aquest cas, tindrem $W(t_1) \neq 0$ per a qualsevol altre $t_1 \in I$.

- En altres paraules,
    - si $W(t_0) \neq 0 \implies W(t) \neq 0 \; \forall t \in I$, i $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t)$ és conjunt fonamental
    - si $W(t_0) = 0 \implies W(t) \equiv 0 \; \forall t \in I$, i $\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}(t)$ no és conjunt fonamental

- **Fórmula de Liouville**: $\boxed{\; W(t) = W(t_0)\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, \mathrm{d}s} \;}$
  essent $\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$ (la *divergència* de $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) = A(t)\, \boldsymbol{X}$).
- Creixement/decreixement d'àrees a $\mathbb{R}^2$:
  - Donat un conjunt fonamental $\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{X}^{(2)}(t)$, l'àrea del paral·lelogram que generen és $|W(t)|$.
  - Aquesta àrea creix/decreix si la matriu $A(t)$ té traça positiva/negativa, i es manté constant si la traça és $\equiv 0$.
  - Anàlogament a $\mathbb{R}^3$ amb volums de paral·lelepípedes.

Resolució de sistemes lineals homogenis a coeficients constants

$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X}$, essent A matriu $n \times n$ constant (és sistema autònom, donat pel camp vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = A\boldsymbol{X}$).

- **Solucions pròpies**
  - Cas $n = 1$: l'EDO $x' = ax$ té com a solució $x(t) = c\,\mathrm{e}^{at}$.
  - Per a $n \geq 2$, busquem solucions similars:
    una funció $\boldsymbol{X}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}$ és solució $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}$ és VEP de VAP λ de A,
    i rep el nom de *solució pròpia*.
  - L'òrbita recorreguda per una solució pròpia és:
    - la semirecta generada pel vector $\boldsymbol{v}$ si $\lambda \neq 0$
    - un punt d'equilibri si $\lambda = 0$
  - La recta o direcció generada pel vector propi $\boldsymbol{v}$ és:
    - atractora si $\lambda < 0$
    - repulsora si $\lambda > 0$
    - neutra (formada per punts d'equilibri) si $\lambda = 0$

- **Cas diagonalitzable sobre els reals**
  - Base de VEPs $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$,
    amb VAPs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (reals) respectivament.
  - Aleshores, tenim un conjunt fonamental format per solucions pròpies:
    $$\boldsymbol{X}^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)}, \ \ldots \ , \ \boldsymbol{X}^{(n)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}^{(n)}$$
  - Solució general: $\boldsymbol{X}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)} + \cdots + c_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}^{(n)}$

- **Cas diagonalitzable amb alguns VAPs complexos**
  - Suposem per exemple que els dos primers VAPs són complexos conjugats:
  $$\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$$
  Llavors, els VEPs associats són complexos, i podem escollir-los conjugats:
  $$\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{w}^{(1)} + \mathrm{i}\boldsymbol{w}^{(2)}, \quad \boldsymbol{v}^{(2)} = \overline{\boldsymbol{v}^{(1)}} = \boldsymbol{w}^{(1)} - \mathrm{i}\boldsymbol{w}^{(2)}$$
  ($\boldsymbol{w}^{(1)}$, $\boldsymbol{w}^{(2)}$ <u>reals</u>)
  - Les solucions pròpies associades a aquests VEPs són també complexes,
  $$\boldsymbol{X}^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{(1)}, \quad \boldsymbol{X}^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{(2)} = \overline{\boldsymbol{X}^{(1)}(t)}$$
  però, per tenir un conjunt fonamental format per solucions <u>reals</u>, podem substituir-les per les parts real i imaginària d'<u>una</u> d'elles,
  $$\boldsymbol{Y}^{(1)}(t) = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{X}^{(1)}(t), \quad \boldsymbol{Y}^{(2)}(t) = \mathrm{Im}\,\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$$
  les quals són també solucions, però <u>no</u> són pròpies.

- Fent càlculs obtenim:

$$\boldsymbol{Y}^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left[\cos\beta t \cdot \boldsymbol{w}^{(1)} - \sin\beta t \cdot \boldsymbol{w}^{(2)}\right]$$
$$\boldsymbol{Y}^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left[\sin\beta t \cdot \boldsymbol{w}^{(1)} + \cos\beta t \cdot \boldsymbol{w}^{(2)}\right]$$

  (notem que $\boldsymbol{Y}^{(1)}(0) = \boldsymbol{w}^{(1)}$, $\boldsymbol{Y}^{(2)}(0) = \boldsymbol{w}^{(2)}$)
- Les òrbites recorregudes per les solucions $\boldsymbol{Y}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{Y}^{(2)}(t)$ es troben sobre el pla generat pels vectors $\boldsymbol{w}^{(1)}$, $\boldsymbol{w}^{(2)}$. Aquest pla és:
  - ⋆ atractor si $\alpha < 0$
  - ⋆ repulsor si $\alpha > 0$
  - ⋆ format per òrbites periòdiques si $\alpha = 0$ (de període $2\pi/\beta$).

- **Cas no diagonalitzable**

  Com que no tenim una base de VEPs, no tenim prou solucions pròpies per formar un conjunt fonamental, i cal completar-lo amb altres tipus de solucions, que s'obtenen a partir de la forma de Jordan de la matriu.

  Per simplificar, ho veurem només per a $n = 2$:

  $\boldsymbol{X}' = A\,\boldsymbol{X}$, essent A matriu 2×2 amb λ com a VAP doble, i que no diagonalitza.

  - Podem escollir vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ tals que

    $$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \qquad A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

    Notem que $\boldsymbol{v}$ és VEP però $\boldsymbol{u}$ no ho és. Canviant a la base $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, obtenim $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, forma de Jordan de A.
  - Aleshores, un conjunt fonamental de solucions ve donat per

    $$\boldsymbol{X}^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{X}^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}$$

- **Cas d'una EDO lineal de segon ordre** (homogènia i a coeficients constants)

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Considerem el *polinomi característic* de l'EDO $p(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ i en trobem les arrels (que coincideixen amb els VAPs de la matriu si passem a sistema 2×2):

  - Arrels reals simples $\lambda_1, \lambda_2 \implies x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$
  - Arrel real doble $\lambda \implies x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t \, \mathrm{e}^{\lambda t}$
  - Arrels complexes $\alpha \pm \mathrm{i}\beta \implies x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t$

Resolució de sistemes lineals no homogenis

(NH) $\quad \boldsymbol{X}' = A(t)\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}(t)$ (de dimensió n)

- Comencem resolent (si podem) el sistema lineal homogeni associat,

  (H) $\quad \boldsymbol{X}' = A(t)\,\boldsymbol{X}$

  Solució: $\boldsymbol{X}_{\mathrm{h}}(t) = c_1\boldsymbol{X}^{(1)}(t) + \ldots + c_n\boldsymbol{X}^{(n)}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{C}$

- Si coneixem una solució particular $\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t)$ de (NH), llavors

$$\underbrace{\boldsymbol{X}(t)}_{\text{sol. gen. (NH)}} = \underbrace{\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t)}_{\text{sol. partic. (NH)}} + \underbrace{\boldsymbol{X}_{\mathrm{h}}(t)}_{\text{sol. gen. (H)}}$$

- Podem trobar una solució particular $\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t)$ de (NH), usant el *mètode de variació de constants*

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{p}}(t) = u_1(t)\boldsymbol{X}^{(1)}(t) + \ldots + u_n(t)\boldsymbol{X}^{(n)}(t) = \Phi(t)\,\boldsymbol{U}(t)$$

  Tenim la fórmula $\boxed{\boldsymbol{U}(t) = \int \Phi(t)^{-1}\boldsymbol{B}(t)\,\mathrm{d}t}$ però, a la pràctica:

  - resolem el sistema $\Phi(t)\,\boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{B}(t)$ ($n \times n$, amb t paràmetre)
  - integrem $\boldsymbol{U}(t) = \int \boldsymbol{U}'(t)\,\mathrm{d}t$

Sistemes lineals: estabilitat

Sistema lineal homogeni a coeficients constants: $\boldsymbol{X}' = A\,\boldsymbol{X}$ $(n \times n)$

- **Estudi qualitatiu**: conèixer propietats de les solucions (cap a on tendeixen, òrbites periòdiques. . .) sense resoldre'l explícitament

- *Obs.*: El sistema és autònom, donat pel camp vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = A\,\boldsymbol{X}$.
- *Obs.*: L'origen sempre és punt d'equilibri.
- Si $\det A \neq 0$, direm que el sistema és *no degenerat*, i llavors l'origen és l'únic punt d'equilibri
- Si $\det A = 0$, direm que el sistema és *degenerat*, i llavors hi ha infinits punts d'equilibri que omplen tot el subspai $\mathrm{Nuc}A$ (recta per l'origen, pla per l'origen. . .)

$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X} \quad (n \times n)$

- *Obs.*: El comportament de les solucions és el mateix lluny que prop de l'origen, ja que

$$\boldsymbol{X}(t) \text{ és solució} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{X}}(t) = c\boldsymbol{X}(t) \text{ també és solució } (c \neq 0)$$

  Per tant, podem parlar de:

  - *Sistema estable*, si tota solució és fitada per a $t \geq 0$
  - *Sistema atractor*, si tota solució tendeix a **0** quan $t \to \infty$
  - etc

- *Obs.*: Un sistema degenerat pot ser 'E no A' o bé 'I no R', però no A ni R.

- *Obs.*: En un sistema degenerat, el comportament de les solucions respecte qualsevol punt d'equilibri $\boldsymbol{X}^0$ és el mateix que respecte l'origen, ja que

$$\boldsymbol{X}(t) \text{ és solució} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{X}^0 + \boldsymbol{X}(t) \text{ també és solució}$$

Classificació dels sistemes lineals 2D
(homogenis i a coeficients constants)

- Fent un canvi lineal podem reduir-nos al cas d'una matriu diagonal o bé en forma de Jordan real:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Casos:

(1) Sistema no degenerat amb VAPs reals, i diagonalitza

(2) Sistema no degenerat amb VAP doble (real), i no diagonalitza

(3) Sistema no degenerat amb VAPs complexos

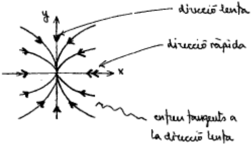
(4) Sistema degenerat

- Sistema no degenerat amb VAPs reals, i diagonalitza: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

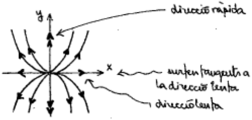
  $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, suposem $\lambda_1 \leq \lambda_2)$

  - Equacions $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$
  - Solucions $x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$
  - Direccions pròpies: els eixos x, y
  - Òrbites del 1$^{\text{er}}$ quadrant: $y = c\, x^{\lambda_2/\lambda_1}$ (per simetria als altres)

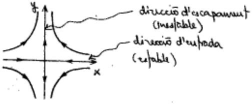
(a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
node propi atractor



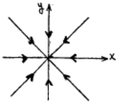
(b) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$
node propi repulsor



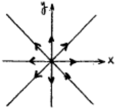
(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
sella



(d) $\lambda < 0$ doble
node propi atractor
(estel·lar)



(e) $\lambda > 0$ doble
node propi repulsor
(estel·lar)



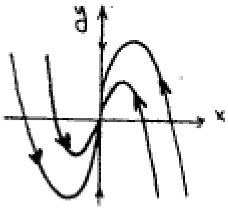
(d,e) totes les solucions són pròpies

- Sistema no degenerat amb VAP doble (real), i no diagonalitza:

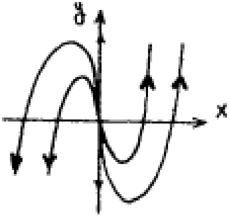
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad (\lambda \neq 0)$$

  - Equacions $x' = \lambda x, \; y' = x + \lambda y$
  - Solucions $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\lambda t}, \; y(t) = (x_0 t + y_0)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$
  - Direccions pròpies: només l'eix y
  - Òrbites al semiplà dret: $y = \dfrac{x}{\lambda} \ln \dfrac{x}{c}$ (per simetria a l'esquerre)

(a) $\lambda < 0$
node impropi atractor

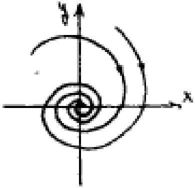


(b) $\lambda > 0$
node impropi repulsor

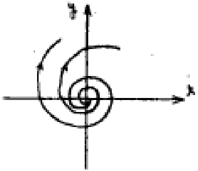


- Sistema no degenerat amb VAPs complexos: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ (suposem $\beta > 0$)
  - Equacions $x' = \alpha x - \beta y, \;\; y' = \beta x + \alpha y$
  - Solucions $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
  - Direccions pròpies: no n'hi ha

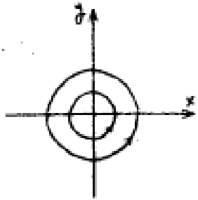
(a) $\alpha < 0$
focus atractor



(b) $\alpha > 0$
focus repulsor

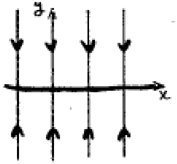


(c) $\alpha = 0$
centre

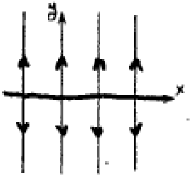


- Sistema degenerat: el 0 és VAP (simple o doble)
  - El 0 és VAP simple: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $(\lambda_2 \neq 0)$
    - ★ Equacions $x' = 0$, $y' = \lambda_2 y$
    - ★ Solucions $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$
    - ★ Direccions pròpies: l'eix x (format per punts d'equilibri) i l'eix y
    - ★ Òrbites: semirectes verticals, i cada punt de l'eix x

(a) $\lambda_2 < 0$

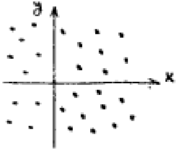


(b) $\lambda_2 > 0$



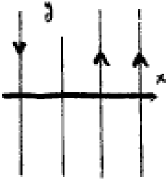
- El 0 és VAP doble, i diagonalitza:
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - ★ Equacions $x' = 0$, $y' = 0$
  - ★ Solucions
    $x(t) = x_0, \;\; y(t) = y_0$
    (tots els punts de $\mathbb{R}^2$ són d'equilibri)
  - ★ Òrbites: cada punt de $\mathbb{R}^2$

(c)



- El 0 és VAP doble, i no diagonalitza:
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - ★ Equacions $x' = 0$, $y' = x$
  - ★ Solucions
    $x(t) = x_0, \;\; y(t) = y_0 + x_0 t$
  - ★ Direccions pròpies: l'eix y (format per punts d'equilibri)
  - ★ Òrbites: rectes verticals, i cada punt de l'eix y

(d)

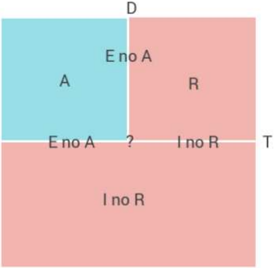


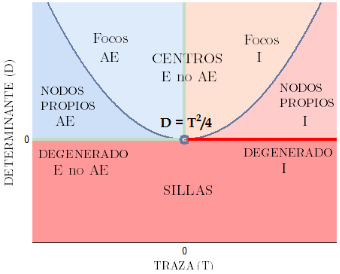
Estabilitat dels sistemes lineals 2D

- Podem agrupar els sistemes lineals 2D segons l'estabilitat de l'origen (o de qualsevol altre punt d'equilibri, si n'hi ha):
  - *Atractors*: node atractor, focus atractor
  - *Estables no atractors*: centre, degenerats (a,c)
  - *Inestables no repulsors*: sella, degenerats (b,d)
  - *Repulsors*: node repulsor, focus repulsor
- **Criteri traça–determinant**

$T = \operatorname{tr} A$

$D = \det A$





Teorema (estabilitat de sistemes lineals)
$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X}$, essent A matriu $\underline{n \times n}$ constant

(a) Si tots els VAPs λ de A compleixen $\mathrm{Re}\lambda < 0$
$\Longrightarrow$ el sistema és atractor

(b) Si algun VAP λ de A compleix $\mathrm{Re}\lambda > 0$
$\Longrightarrow$ el sistema és inestable

(b') Si tots els VAPs λ de A compleixen $\mathrm{Re}\lambda > 0$
$\Longrightarrow$ el sistema és repulsor

(c) Si tots els VAPs λ de A compleixen $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ i algun té $\mathrm{Re}\lambda = 0$, aleshores:

- ★ si tots els VAPs amb $\mathrm{Re}\lambda = 0$ són semi-simples
$\Longrightarrow$ el sistema és estable no atractor
- ★ si algun VAP amb $\mathrm{Re}\lambda = 0$ no és semi-simple
$\Longrightarrow$ el sistema és inestable no repulsor

- *Def.*: Un VAP λ de A és *semi-simple* si la seva multiplicitat geomètrica coincideix amb la multiplicitat algebraica

Aplicació: oscil·lacions harmòniques i esmorteïdes

(1) *Oscil·lacions mecàniques*

$$m\,x'' = -k\,x - \beta\,x' \qquad \begin{cases} \text{sense fricció si } \beta = 0 \\ \text{amb fricció si } \beta > 0 \end{cases}$$

$$x'' = -a\,x - b\,x', \quad \text{on } \; a = k/m > 0, \; b = \beta/m \geq 0$$

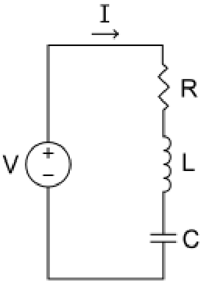
Matriu del sistema associat: $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}$,

amb $T = -b$, $D = a$, $\Delta = T^2 - 4D = b^2 - 4a$.

- si $b = 0 \longrightarrow$ E no A $\longrightarrow$ centre (osc. harmòniques)
- si $b > 0 \longrightarrow$ A
  - si $0 < b < 2\sqrt{a} \longrightarrow$ focus atractor (osc. sub-esmorteïdes)
  - si $b = 2\sqrt{a} \longrightarrow$ node impropi atractor (osc. críticament esmorteïdes)
  - si $b > 2\sqrt{a} \longrightarrow$ node propi atractor (osc. sobre-esmorteïdes)

(2) *Oscil·lacions elèctriques*

Circuit RLC:



$I(t)$: intensitat de corrent

R : resistència
L : inductància d'una bobina
C : capacitat d'un condensador

V : tensió subministrada (suposem constant)

Per la *llei del voltatge de Kirchhoff* (o *segona llei de Kirchhoff*), tenim l'equació "integro-diferencial"

$$L\,I'(t) + R\,I(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(s) = V,$$

i derivant respecte t obtenim una EDO lineal de segon ordre,

$$L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}\,I(t) = 0$$

(del mateix tipus que amb les oscil·lacions mecàniques).

Sistemes no lineals

- Sistema autònom $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$,
  donat per un camp vectorial $\boldsymbol{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (de classe $\mathcal{C}^1$)
  - En general no es poden resoldre explícitament, però podem estudiar l'estabilitat de punts d'equilibri, l'existència de quantitats conservades, etc.
- Un punt $\boldsymbol{X}^0 \in \mathcal{U}$ és punt d'equilibri si $\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0) = \mathbf{0}}$
  - En un sistema no lineal, les nocions de punt d'equilibri E, I, A, R són *locals* (referides a cada punt d'equilibri i no a tot el sistema)

- **Evolució d'àrees/volums**

  (àrees en sistemes 2D, volums en sistemes 3D ...).

  Donat $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ sistema autònom, $\boldsymbol{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definim la seva *divergència*:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{tr} \mathrm{D}F(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

  (és una funció escalar). Tenim:

  - a les zones de $\mathcal{U}$ on $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) > 0$, el sistema expandeix àrees;
  - a les zones de $\mathcal{U}$ on $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) < 0$, el sistema contrau àrees;
  - si $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \equiv 0$, el sistema conserva àrees.

  Obs.: En el cas d'un sistema autònom 2D, deduïm que si $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) > 0$ per a tot $\boldsymbol{X} \in \mathcal{U}$, o bé $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) < 0$ per a tot $\boldsymbol{X} \in \mathcal{U}$, aleshores no podem tenir cap òrbita periòdica (llevat que sigui un punt d'equilibri) que tanqui una regió continguda en $\mathcal{U}$.

- **Mètode de linealització**

  $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ sistema autònom, $\boldsymbol{X}^0$ punt d'equilibri

  - *Def.*: El *sistema linealitzat* de $\boldsymbol{F}$ en el punt d'equilibri $\boldsymbol{X}^0$ és

    $$\boxed{\boldsymbol{X}' = \mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0)\,(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0)}$$

    on $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0)$ és la *matriu jacobiana* de $\boldsymbol{F}$ en el punt $\boldsymbol{X}^0$.

  - Cas 2D: Escrivint $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = (P(x,y), Q(x,y))$, $\boldsymbol{X}^0 = (x_0, y_0)$, el sistema linealizat és

    $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(x_0,y_0) & P_y(x_0,y_0) \\ Q_x(x_0,y_0) & Q_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

    essent $P_x = \dfrac{\partial P}{\partial x}$, etc.
    (*Nota*: es tracta d'un sistema lineal "centrat en el punt (x_0, y_0)".)

Teorema (mètode de linealització)
$\boldsymbol{X}' = F(\boldsymbol{X})$, amb $\boldsymbol{F} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$
$\boldsymbol{X}^0 \in \mathcal{U}$ punt d'equilibri

(a) Si tots els VAPs λ de $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0)$ compleixen $\mathrm{Re}\lambda < 0$
$\Longrightarrow$ el punt $\boldsymbol{X}^0$ és atractor

(b) Si algun VAP λ de $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0)$ compleix $\mathrm{Re}\lambda > 0$
$\Longrightarrow$ el punt $\boldsymbol{X}^0$ és inestable

(b') Si tots els VAPs λ de $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0)$ compleixen $\mathrm{Re}\lambda > 0$
$\Longrightarrow$ el punt $\boldsymbol{X}^0$ és repulsor

- A la resta de casos (és a dir, si tots els VAPs λ de $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^0)$ compleixen $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ i algun té $\mathrm{Re}\lambda = 0$) el mètode de linealització <u>no decideix</u>

- **Mètode de Lyapunov**
  Podem *intentar* aplicar-lo quan el mètode de linealització no decideix.

  $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ sistema autònom, $\boldsymbol{X}^0$ punt d'equilibri

  - Considerem una funció $V(\boldsymbol{X})$ que doni "una mesura de la distància a $\boldsymbol{X}^0$", p.ex.:
    - ★ $V(\boldsymbol{X}) = \left\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0\right\|^2 = \left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \cdots + \left(x_n - x_n^0\right)^2$
    - ★ $V(\boldsymbol{X}) = a_1\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \cdots + a_n\left(x_n - x_n^0\right)^2$ amb $a_1, \ldots, a_n > 0$

    (no podem considerar $\left\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0\right\| = \sqrt{\cdots}$ perquè no és $\mathcal{C}^1$)
  - Donada una trajectòria $\boldsymbol{X}(t)$, per saber si s'apropa o s'allunya de $\boldsymbol{X}^0$, derivem la funció $V(\boldsymbol{X}(t))$ usant la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[V(\boldsymbol{X}(t))] = \langle \nabla V(\boldsymbol{X}(t)), \boldsymbol{X}'(t) \rangle = \langle \nabla V(\boldsymbol{X}(t)), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) \rangle$$

  - Ara considerem la funció $\boxed{W(\boldsymbol{X}) = \langle \nabla V(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \rangle}$
    (la "derivada temporal" de $V(\boldsymbol{X})$ al llarg de les trajectòries)
    - ★ en els punts on $W(\boldsymbol{X}) < 0$, les trajectòries s'apropen a $\boldsymbol{X}^0$
    - ★ en els punts on $W(\boldsymbol{X}) > 0$, les trajectòries s'allunyen de $\boldsymbol{X}^0$

    (des del punt de vista de la distància $V(\boldsymbol{X})$ considerada)

- *Def.*: Considerem una funció escalar $W : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i un punt $\boldsymbol{X}^0 \in \mathcal{U}$ tal que $W(\boldsymbol{X}^0) = 0$,
  - ★ W és *definida positiva* en $\boldsymbol{X}^0$ si té un mínim relatiu estricte en $\boldsymbol{X}^0$
  - ★ W és *definida negativa* en $\boldsymbol{X}^0$ si té un màxim relatiu estricte en $\boldsymbol{X}^0$
  - ★ W és *semi-definida positiva* en $\boldsymbol{X}^0$ si té un mínim relatiu en $\boldsymbol{X}^0$ (no necessàriament estricte)
  - ★ W és *semi-definida negativa* en $\boldsymbol{X}^0$ si té un màxim relatiu en $\boldsymbol{X}^0$ (no necessàriament estricte)
- Exemples:
  - ★ $W(x, y) = x^2 + y^2$ és definida positiva a l'origen
  - ★ $W(x, y) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2$ és semi-definida negativa a l'origen

Teorema de Lyapunov

$\boldsymbol{X}' = F(\boldsymbol{X})$, amb $\boldsymbol{F} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$

$\boldsymbol{X}^0 \in \mathcal{U}$ punt d'equilibri

$V(\boldsymbol{X})$ de classe $\mathcal{C}^2$, definida positiva en $\boldsymbol{X}^0$ (*"funció de Lyapunov"*)

$W(\boldsymbol{X}) = \langle \nabla V(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \rangle$ (ho calculem)

(a) si W és definida negativa en $\boldsymbol{X}^0 \implies \boldsymbol{X}^0$ és atractor

(b) si W és definida positiva en $\boldsymbol{X}^0 \implies \boldsymbol{X}^0$ és repulsor

(c) si W és semi-definida negativa en $\boldsymbol{X}^0 \implies \boldsymbol{X}^0$ és estable

(d) si W és semi-definida positiva en $\boldsymbol{X}^0 \implies \boldsymbol{X}^0$ no és atractor

(e) si $W \equiv 0 \implies \boldsymbol{X}^0$ és estable no atractor

- *Nota*: Com escollim una funció de Lyapunov $V(\boldsymbol{X})$ adequada? En general és difícil, però en problemes de mecànica l'energia total (cinètica + potencial) ens pot ser útil.

- *Def.* : Una funció $V(\boldsymbol{X})$ s'anomena una *quantitat conservada* (o *integral primera*) si és constant sobre les trajectòries, és a dir, si $W(\boldsymbol{X}) = \langle \nabla V(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \rangle \equiv 0$.
- En un sistema 2D ($n = 2$), si $V(\boldsymbol{X})$ és una quantitat conservada llavors les òrbites estan contingudes en corbes de nivell de $V(\boldsymbol{X})$.
- *Def.* : Un sistema no lineal 2D amb un punt d'equilibri $\boldsymbol{X}^0$ tal que el sistema linealitzat en $\boldsymbol{X}^0$ és un centre, i que té quantitat conservada $V(\boldsymbol{X})$, direm que té un *centre no lineal* en $\boldsymbol{X}^0$.

Aplicació: equació del pèndol

$x(t)$: angle respecte la posició vertical

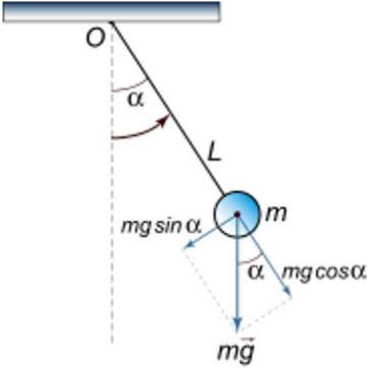
$x'(t)$: velocitat angular

$x''(t)$: acceleració angular

EDO:

$$m\,\ell\,x'' = -m\,g\,\sin x - \beta\,\ell\,x'$$

$$\boxed{x'' = -a\,\sin x - b\,x'}$$



$a = g/\ell > 0, \;\; b = \beta/m \geq 0$

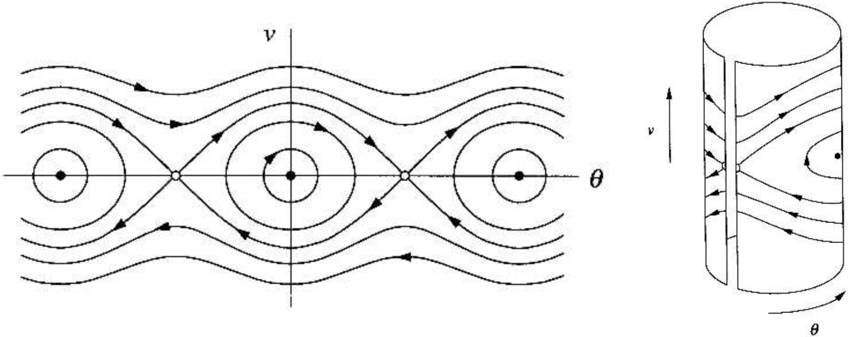
- $\beta = 0$ sense fricció
- $\beta > 0$ amb fricció

- Passant a sistema (amb $x(t)$ i $y(t) = x'(t)$ com a funcions incògnites), el camp vectorial és $\boldsymbol{F}(x, y) = (y, -a \sin x - by)$.
- Punts d'equilibri: $(0, 0)$ i $(\pm\pi, 0)$ (posicions inferior i superior d'equilibri) *Nota*: també ho són tots el $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, però són equivalents als anteriors per periodicitat.
- Estabilitat per linealització:
    - $(\pm\pi, 0)$ és <u>I no R</u> (el sistema linealitzat és sella)
    - si $b > 0$, el $(0, 0)$ és <u>A</u> (el sistema linealitzat és focus atractor / node impropi/propi atractor)
    - si $b = 0$, per al $(0, 0)$ <u>no decideix</u> (el sistema linealitzat és centre)
- Si $b = 0$, al $(0, 0)$, podem aplicar el mètode de Lyapunov amb

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + a\,(1 - \cos x) \; = \frac{y^2}{2} + 2a \sin^2 \frac{x}{2}$$

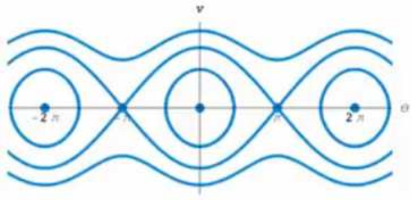
(ve de l'*energia total*: $E = \frac{1}{2}\, m(\ell\, x')^2 + mg\ell\,(1 - \cos x)$). La funció V és quantitat conservada ($W \equiv 0$) i deduïm que el $(0, 0)$ és <u>E no A</u>.

- En el cas del pèndol <u>sense fricció</u> ($b = 0$), obtenim les òrbites a partir de les corbes de nivell de la funció V. Per la periodicitat, podem restringir-nos a la franja $-\pi \leq x \leq \pi$. Identificant les rectes $x = \pm\pi$, podríem dibuixar el retrat de fases sobre un cilindre.

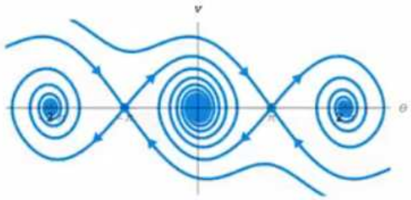


Sobre el nivell $V = 2a$ tenim les corbes $y = \pm 2\sqrt{a}\cos(x/2)$, que corresponen a òrbites que tendeixen a $(\pm\pi, 0)$ quan $t \to \pm\infty$. Aquestes òrbites separen dos tipus diferents d'òrbites periòdiques.

- Per al pèndol <u>amb fricció</u> ($b > 0$), p.ex. l'òrbita que provè de $(-\pi, 0)$ per a $t \to -\infty$, ja no tendeix al punt $(\pi, 0)$ sinó al punt d'equilibri atractor $(0, 0)$.



$b = 0$



$b > 0$

Fonts de les figures:

https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEproj/sp15/EthanRetherford/paper.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator

https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/classifSL.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit

https://www.math24.net/nonlinear-pendulum/

http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa02/precourse/leok-26sep02.pdf