Equacions en Derivades Parcials (EDPs)

Pere Gutiérrez

Desembre 2020

Les equacions clàssiques

- **Noció d'EDP i alguns tipus**
  - Una EDP és una equació diferencial en què la incògnita és una funció de 2 o més variables.
  - EDP *de primer ordre* (forma general): $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, essent $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ funció donada (funció incògnita: $u(x, y)$)
  - EDP *de segon ordre* (forma general): $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ (notacions: $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ...)
  - EDP *lineal* de segon ordre:
    $$a_1(x, y)\, u_{xx} + a_2(x, y)\, u_{xy} + a_3(x, y)\, u_{yy} + a_4(x, y)\, u_x + a_5(x, y)\, u_y + a_6(x, y)\, u = b(x, y)$$
    pot ser:
    a coeficients constants / variables
    homogènia / no homogènia

- Exemples d'EDPs i solucions.
  - $u_x + u_y = 2u^2$ (EDP no lineal de primer ordre): la funció $u(x, y) = -1/(x + y)$ n'és una solució
  - $u_x = u$ (EDP lineal homogènia de primer ordre): la solució general és $u(x, y) = g(y)\,\mathrm{e}^x$, on $g(y)$ és una <u>funció arbitrària</u>
  - $u_{xy} = 0$ (EDP lineal homogènia de segon ordre): la solució general és $u(x, y) = g(x) + h(y)$, essent $g(x)$, $h(y)$ funcions arbitràries

Equacions de la física matemàtica

(t variable temporal; x, y variables espacials)

- equació d'ones: $\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)}$
  descriu el moviment oscil·latori d'una corda vibrant
- equació de la calor: $\boxed{u_t - k^2 u_{xx} = F(x,t)}$
  descriu l'evolució de la distribució de temperatures en una barnilla
- equació de Laplace/Poisson: $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = G(x,y)}$
  descriu els estats d'equilibri d'una membrana elàstica,
  o bé de la distribució de temperatures en una planxa

Obs.: No estem considerant un objecte puntual (partícula $\rightarrow$ EDO)
sinó objectes 1D o 2D (barnilla, membrana... $\rightarrow$ EDP)

- Per determinar una solució, caldrà afegir condicions addicionals:
  - **condicions inicials** (CIs): estat de l'objecte a l'instant inicial ($t = 0$)
  - **condicions de contorn** (CCs): interacció amb el medi (a la frontera del domini de x, y)

Equació d'ones 1D: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$, $x \in (0,L)$, $t \in \mathbb{R}$

- $u(x,t)$ mesura el desplaçament vertical del punt x de la corda a l'instant t (estem suposant petites oscil·lacions)
- $c = \sqrt{\tau/\rho}$ serà la velocitat a què viatgen les ones (ρ: densitat lineal de massa; τ: tensió de la corda)
- $F(x,t) = f(x,t)/\rho$, on $f(x,t)$ és la força en la direcció vertical, per unitat de longitud (p.ex. el pes de la corda seria $f = -\rho g$)

Equació d'ones 2D: $u_{tt} - c^2 \triangle u = F(x,y,t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$

- $u(x,y,t)$ mesura el desplaçament vertical de cada punt (x,y) d'una membrana (p.ex. un tambor)
- $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$, laplaciana respecte les variables espacials
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domini (forma de la membrana)

Suposant $F = F(x,y)$, els *estats d'equilibri* o *estacionaris* de l'equació d'ones 2D són les solucions $u = u(x,y)$ (no depenents de t). Aquestes satisfan l'EDP $\triangle u = G(x,y)$, essent $G(x,y) = -F(x,y)/c^2$. Aquesta EDP s'anomena:

- **equació de Laplace** si $G(x,y) \equiv 0$ (cas homogeni)
- **equació de Poisson** si $G(x,y) \not\equiv 0$ (cas no homogeni)

Equació de la calor 1D: $u_t - k^2 u_{xx} = F(x,t),\ \ x \in (0,L),\ \ t > 0$

- $u(x,t)$ mesura la temperatura del punt x de la barnilla a l'instant t
- $k = \sqrt{\kappa/(c\rho)}$
  (κ: conductivitat tèrmica; c: calor específica; ρ: densitat de massa)
- $F(x,t) = f(x,t)/(c\rho)$, on $f(x,t)$ és la font de calor (energia calorífica per unitat de temps i de volum)

Equació de la calor 2D: $u_t - k^2 \triangle u = F(x,y,t),\ \ x \in \Omega,\ \ t > 0$

- $u(x,y,t)$ mesura la temperatura de cada punt (x,y) d'una planxa
- $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$, laplaciana
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domini (forma de la planxa)

Suposant $F = F(x,y)$, els estats d'equilibri o estacionaris de l'equació de la calor 2D són les solucions $u = u(x,y)$ (no depenents de t), i satisfan l'equació de Laplace/Poisson $\triangle u = G(x,y)$, essent $G(x,y) = -F(x,y)/k^2$.

Condicions inicials (CIs)
S'imposen a l'instant inicial ($t = 0$), a tot el domini.

- Per a l'equació d'ones 1D:

$$u(x,0) = f(x),\ \ x \in (0,L) \quad \text{(posició o desplaçament inicial)}$$
$$u_t(x,0) = g(x),\ \ x \in (0,L) \quad \text{(velocitat inicial)}$$

- Per a l'equació de la calor 1D:

$$u(x,0) = f(x),\ \ x \in (0,L) \quad \text{(temperatura inicial)}$$

  Nota: En aquest cas només s'ha d'imposar una CI, ja que l'equació de la calor és de primer ordre en la variable t (tot i que és de segon ordre en x)

- No s'imposen CIs per a l'equació de Laplace/Poisson, ja que no hi ha variable temporal

Qualsevol condició (CI o CC) s'anomena *homogènia* si està igualada a 0.

Condicions de contorn (CCs)
S'imposen a tota la frontera del domini, és a dir,
per a $x = 0$ i $x = L$ en el cas 1D, i per a $(x, y) \in \partial\Omega$ en el cas 2D,
i sempre per a tot t.

Poden ser de diferents tipus. Vegem-les en el cas 1D ,

- **CCs de Dirichlet**: $$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t), \ \forall t$$
- **CCs de Neumann**: $$u_x(0,t) = -\gamma(t), \quad u_x(L,t) = \delta(t), \ \forall t$$
- **CCs mixtes**: Dirichlet en un extrem i Neumann a l'altre
- **CCs periòdiques**: $$u(0,t) = u(L,t), \quad u_x(0,t) = u_x(L,t), \ \forall t$$

Vegem ara les CCs en el cas 2D,

- **CCs de Dirichlet**: $u(x, y, t) = \alpha(x, y, t), \ \forall (x, y) \in \partial\Omega, \ \forall t$
- **CCs de Neumann**: $\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(x, y, t) = \gamma(x, y, t), \ \forall (x, y) \in \partial\Omega, \ \forall t$
- **CCs mixtes**: dividint la frontera en dues parts, $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$, imposem Dirichlet a C_1 i Neumann a C_2

Notació: $\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = \langle \nabla u, \boldsymbol{N} \rangle$ és la *derivada normal* (derivada direccional respecte el vector normal exterior al domini)

En el cas 1D, interpretant que $\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(0, t) = -u_x(0, t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(L, t) = u_x(L, t)$, podem reescriure les CCs de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(0, t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(L, t) = \delta(t)$$

Relació amb el flux de calor

En el cas de l'equació de la calor, el *flux de calor* a la frontera (per unitat de superfície) ve donat per

$$q = \kappa \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}$$

Aquest valor q mesura el flux d'entrada (és a dir, $q > 0$ vol dir entrada de flux, i $q < 0$ vol dir sortida de flux).

- Exemple. Suposem que en l'equació de la calor 1D homogènia hem imposat CCs de Neumann $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(0, t) = \gamma(t)$, $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(L, t) = \delta(t)$. La *temperatura mitjana* (en cada instant) ve donada per

$$T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t)\, \mathrm{d}x,$$

i la seva variació és

$$T'(t) = \frac{k^2}{L}(\gamma(t) + \delta(t))$$

(proporcional a suma de les entrades de calor pels extrems).

Fórmula de D'Alembert (cas d'una corda vibrant infinita)
Considerem el problema consistent en l'equació d'ones 1D (homogènia) al domini $\mathbb{R}$, amb CIs (en aquest cas, no té sentit imposar CCs),

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- La *solució* ve donada per la fórmula de D'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,\mathrm{d}u$$

  (hi ha una versió més completa de la fórmula que inclou el cas no homogeni).
- Definint $p(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} G(x)$, $q(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} G(x)$, essent $G(x) = \int g(x)\,\mathrm{d}x$ (primitiva), podem escriure

$$u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct),$$

  que s'interpreta com la superposició de dues ones que viatgen cap a l'esquerra i cap a la dreta amb velocitat c.

Separació de variables

Idees bàsiques (suposem el cas $u(x,t)$, faríem anàlogament amb $u(x,y)$)

(1) Partim d'un "*problema*" (EDP + CIs + CCs), amb l'EDP homogènia i amb una única condició no homogènia.

- ⋆ Si l'EDP és no homogènia, podem homogeneïtzar-la si en coneixem una solució particular $u_{\mathrm{p}}(x,t)$. Llavors escrivim $u = u_{\mathrm{p}} + v$ i plantegem el problema per a $v(x,t)$ (EDP homogènia, amb les CIs i CCs modificades).
- ⋆ Si hi ha més d'una condició no homogènia, podem desglossar el problema en suma de dos o més problemes, cadascun amb una única condició no homogènia.

(2) Suprimint inicialment la condició no homogènia, tenim un problema homogeni (al qual li falta una condició). Busquem solucions *no trivials* (és a dir, no nul·les) d'aquest problema, de la forma $\boxed{u(x,t) = X(x)\,T(t)}$

Això ens porta a plantejar dos problemes d'EDOs, per a $X(x)$ i $T(t)$, depenents d'un paràmetre λ, amb algunes condicions addicionals provinents de les CIs i CCs.

(3) El problema per a $X(x)$ serà un *problema de valors a la frontera* (PVF). Busquem els valors λ_n ($n \geq n_0$) per als quals existeix solució no trivial $X_n(x)$; s'anomenen *valors propis* (VAPs) i *funcions pròpies* (FUPs) respectivament.

(4) Amb les λ_n trobades, resolem l'altre problema i obtenim unes funcions $T_n(t)$.

(5) Les funcions $u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t)$ s'anomenen *modes normals* (o solucions fonamentals) del problema homogeni. Qualsevol 'combinació lineal' (finita o infinita) dels modes normals és també solució del problema homogeni: $u(x,t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n u_n(x,t)$.

(6) Finalment, determinem els coeficients d_n imposant la condició no homogènia que havíem suprimit. Ens alguns casos es poden trobar "a ull" però, en general, caldrà trobar els d_n com a coeficients d'una *sèrie de Fourier* (segons el problema, podrà ser una sèrie de cosinus, de sinus, o completa).

PVFs habituals (VAPs i FUPs):

- $X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X(L) = 0$ (Dirichlet)
$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 1$$
- $X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = X'(L) = 0$ (Neumann)
$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$
- $X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X'(L) = 0$ (mixtes 1)
$$\lambda_n = -\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$
- $X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = X(L) = 0$ (mixtes 2)
$$\lambda_n = -\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$
- $X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ X(-L) = X(L),\ X'(-L) = X'(L)$ (periòdiques)
$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \ n \geq 0$$
$$\widetilde{X}_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \ n \geq 1$$

Sèries de Fourier (recordatori):

- de cosinus, per a $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$$

- de sinus, per a $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$$

- completa, per a $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$$