Funció de distribució de les velocitats de les estrelles a l'entron del Sol

Rafael Cubarsi

PREFACI A LA MEMÒRIA DIGITAL

El que no queda registrat passa en poc temps a l'oblit, com si mai no hagués succeït. Quan vaig presentar aquesta memòria per a obtenir el Grau de la Llicenciatura en Ciències Físiques, l'any 1982, era habitual deixar-ne una còpia impresa a la biblioteca de la Càtedra d'Astronomia, la Biblioteca de l'Observatori de l'Ebre de la Facultat de Física, i potser també a la Biblioteca de la Universitat de Barcelona. Això valia tant per a tesis de llicenciatura com per a tesis doctorals. Si algú d'un altre país volia consultar-les ho tenia difícil: havia de demanar-ne els microfilms o fer de turista. En pocs casos aquestes memòries s'editaven íntegres en forma de llibre o en revistes locals especialitzades (n'hi havia poques i en general van anar desapareixent). La ciència és d'àmbit mundial, i una revista que no s'editi en llengua anglesa i es distribueixi urbi et orbi no és eficaç. El procediment de difusió habitual d'aquests treballs, especialment les tesis doctorals, era i és fer-ne publicacions totals o parcials en revistes internacionals del ram. Tanmateix, trobar un article publicat en una revista de poca difusió, o molt antiga, era de veres una aventura. I si no, que ho preguntin a en Jaume Sanz i en Miguel Juan, que encara recordaran quant de bé ens ho vam passar quan vam anar amb Talgo a Saragossa a consultar uns números del Soviet Astronomy que tenien a la Facultat de Matemàtiques. Cinc hores en tren des de Barcelona, amb una parada fantasma i eterna al desert dels Monegres, per a no baixar-hi ningú.

Internet, per sort o per desgràcia, ha revolucionat la manera de registrar i d'accedir a les obres en tots les àrees de la cultura. Internet és més eficaç que la millor de les revistes. Per això tothom s'ha posat a digitalitzar les publicacions i, per tant, estan desapareixent les publicacions en paper. Per exemple, des de principis del 2010 la revista Astronomy & Astrophysics ha deixat de fer l'edició impresa d'algunes seccions. I mira que feia il·lusió rebre per correu un sobre de color marró amb els reprints dels articles! Després, els signaves, els dedicaves amb carinyo, i els intercanviaves amb l'Slobodan Ninković o en Manuel Hernández. Tot això s'ha acabat. Actualment, doncs, si el que està en paper no es canvia a format electrònic, també passarà a l'oblit. És la llei d'evolució dels registres, un camp en el que el lamarckisme encara s'hi manté vigent.

Conseqüentment, i com que em sembla que aquesta memòria encara pot ser d'utilitat, he decidit rememorar-la i reeditar-la electrònicament. Tot suposant que es pugui considerar una primera edició la que vaig entregar al Departament de Física de la Terra i del Cosmos. Hauria d'haver estat una tasca habitual, d'ofici, que les universitats fessin un dipòsit legal de les seves produccions i les registressin amb un número de sèrie. Però no, això, aquí no se solia fer. Tot era bastant com d'estar per casa. Ja serà doncs un guany, des del punt de vista conservacionista, tenir-ne una còpia digital que es pugui consultar d'arreu del món (no sé, però, si ser escrita en català ajudarà gaire). Però, sobretot, des del punt de vista científic, o millor pedagògic, també li veig alguna utilitat. Totes aquestes qüestions, més aviat teòriques i bàsiques, també s'estan oblidant. Requereixen temps i paciència per a ser estudiades, i ara els plans d'estudi compten amb molta Internet i poc temps.

Al primer capítol, s'hi exposen els principis fonamentals de la dinàmica i l'estadística estellars. Es pot fer servir molt bé a mena d'apunts introductoris d'aquestes àrees, tant per a assignatures d'astronomia dels darrers cursos de grau com per les de postgrau. Després, en el segon capítol, s'hi fa un repàs de la teoria d'aproximació de funcions: espais de funcions de quadrat integrable, millor aproximació, etc., amb èmfasi especial en els polinomis d'Hermite i Laguerre. Això és útil en carreres de ciències i enginyeria. Finalment, en el darrer capítol, s'hi barreja tot. Es resol un problema d'aproximació d'una funció de densitat de probabilitats multivariant a partir dels moments mostrals d'unes variables aleatòries, que en aquest cas són les tres components de les velocitats de les estrelles properes. Per tant, és un bon exemple, senzill i bastant complet, que inclou coneixements d'astronomia, dinàmica analítica, probabilitats, estadística, anàlisi funcional i anàlisi numèrica.

Tot plegat també servirà per a fer memòria del professor Dr. Juan José de Orús, un home savi que va ser l'introductor dels estudis de dinàmica galàctica a Espanya. També fou qui va teletransportar la Càtedra d'Astroniomia des de la Facultat de Matemàtiques a la de Física. Llavors, això podia semblar un rampell, però ara no ens podriem imaginar els estudis d'astronomia deslligats dels d'astrofísica o de radioastronomia. I també recordaré la Dra. M. Assumpció Català, una dona de qualitats humanes i científiques extraordinàries, i pionera de les astrònomes d'Espanya enmig d'un munt de barbes. Ells foren qui m'introduïren a tota aquesta temàtica.

Aquí deixo doncs la memòria, per si algú la vol fer servir.

L'autor, març de 2011.

FUNCIÓ DE DISTRIBUCIÓ DE LES VELOCITATS DE LES ESTRELLES A L'ENTORN DEL SOL

RAFAEL CUBARSI i MORERA

Memòria presentada per a optar al
Grau de la Llicenciatura en Ciències Físiques
a la
Càtedra d'Astronomia
Dept. de Física de la Terra i del Cosmos
Facultat de Física
Universitat de Barcelona
Maig de 1982

I N D E X

I N T R O D U C C I Ó

> Continuà, doncs, el seu camí; però, que llarg que era! En efecte, la carretera, el carrer principal del poble, no duia al turó del castell,sinó només a les rodalies ...
>
> FRANZ KAFKA, El Castell

Davant la impossibilitat d'una solució determinista al problema del moviment de les estrelles dins la galàxia, no queda altre camí, com en tants altres casos, que el de fer un estudi estadístic.

El que ens proposem en el present treball és donar un model per a la funció de distribució (FDD, per abreviar) de les velocitats de les estrelles, que sigui vàlid a l'entorn del sol. Per a això, ens referirem a la mostra de 870 estrelles, considerades per Erickson(1975), preses del catàleg de Gliese(1969) i situades a un radi de 22 pc al voltant del sol. Les constants numèriques,que s'utilitzaran, es recolzaran en aquesta mostra.

Un model de FDD quedarà acceptat o refusat segons si els seus moments associats es corresponen amb els calculats experimentalment.

Fins que Erickson(1975) va donar a conèixer l'existència dels moments d'ordre imparell a l'entorn del sol, totes les distribucions proposades eren, bàsicament, simètriques. Ara, ja no es poden mantenir i s'han de confeccionar nous models. Aquí n'hi ha un exemple.

La línia que s'ha seguit és la següent:

En el primer capítol es comença amb un repàs a les qüestions fonamentals de la dinàmica galàctica, que posteriorment s'usaran, a saber, funció de distribució, moments, relacions entre ells, teorema de Jeans i equació fonamental. Després, segons les integrals primeres de les equacions del moviment de les estrelles, de que disposem a l'entorn del sol, veiem diversos tipus de FDD. En particular,desenrotllem el model , que podriem anomenar quadràtic en dues components de les velocitats residuals, calculant les relacions generals que compliran els seus moments. Finalment, tractem la distribució quadràtica en velocitats residuals, que fins ara s'havia considerat un model bàsic i que permetia explicar els moments d'ordre parell.

En el segon capítol, repassem i desenrotllem els mètodes matemàtics,que permetran resoldre el nostre problema. La funció desconeguda roman sota el signe integral al calcular els moments. Per a calcular-la, cal expressar-la en forma polinòmica i determinar els coeficients.De fet,cada polinòmi va multiplicat per una funció que fa a la FDD integrable a tot l'espai. Si cada polinòmi es calcula a partir d'una base de polinomis ortogonals, els coeficients vénen determinats unívocament pels moments i un moment no altera els coeficients ja calculats amb els altres moments d'ordre inferior. Si no calculéssim els polinomis amb aquest mètode, cada vegada que es coneguessin nous moments hauriem de refer els càlculs. Veiem, doncs, que és una aventatge gran. Els polinomis ortogonals,que necessitarem són els d'Hermite i els de Laguerre generalitzats. També es repassen,en aquest capítol , algunes propietats de completitut, aproximació de funcions i altres propietats característiques d'aquests polinomis, que ens seran d'utilitat. El mètode descrit és equivalent, si suposem que la FDD és de quadrat integrable, a calcular-la a partir d'una base ortogonal de funcions de l'espai de les funcions de quadrat integrable.

En el tercer i darrer capítol, es proposa la funció,que resol el problema plantejat. Serà la superposició d'una Schwarzschild generalitzada amb una funció,producte d'una quadràtica en velocitats residuals per una funció imparella en la segona component d'aquestes. Aquesta solució és possible gràcies a que està en el marc general d'una FDD del tipus $f(I+\lambda K, J)$. Naturalment s'aconsegueix que la FDD sigui positiva, cosa que no sempre passa quan es fan aproximacions polinomials. Al finalitzar aquest tercer capítol, es proposa com a mètode general per al càlcul de FDD's, el prendre una funció globalment expressada en una base de funcions de quadrat integrable. És pot prendre, com a funció pes, una funció tipus Schwarzschild. Les relacions entre moments no són de tan bon calcular, però matemàticament és una forma més elegant de resoldre el problema. Per a que la FDD així obtinguda sigui prou bona, és essencial conèixer quants més moments millor; d'aquesta forma, tendirà en norma a la FDD que genera els moments. En aquest aspecte, cal subratllar que ens hem vist obligats a usar aquest procediment, donada la impossibilitat de recórrer a la funció característica, com a generadora de moments, i per la que, en cas de ser possible, fent la transformada inversa de Fourier hauriem obtingut la FDD desitjada.

Vull acabar, agraïnt sincerament al Dr. Juan J. de Orús el fet de que m'hagi proposat i dirigit aquest treball, així com totes les suggerències, aclariments i ensenyances que m'ha donat per a poder-lo portar a bon fi, sense les que no hauria estat possible.

Barcelona, Abril de 1982

1 - Funció de distribució de les velocitats estel.lars

1.1 - Moments de la distribució de velocitats estel.lars

Considerem el nostre model galàctic com una distribució continua de massa. La seva descripció es realitza mitjançant la funció de distribució (FDD), definida de la següent forma:

Sigui D_x l'espai vectorial real tridimensional, que denota les posicions de les estrelles. Els seus elements són de la forma $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Sigui D_v l'espai vectorial real tridimensional, que representa a les velocitats de les estrelles. Els seus elements són de la forma $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. L'espai de fases es defineix com el producte cartesià $D_x \times D_v$.

La funció de distribució és una funció continua i diferenciable, $f : D_x \times D_v \times R \longrightarrow R$ (R és el conjunt dels reals), tal que si $t \in R$ representa al paràmetre temps, a cada terna $(\underline{x},\underline{v},t)$ li correspon $f(\underline{x},\underline{v},t)$, amb les següents condicions:

$f(\underline{x},\underline{v},t)$ és sempre positiva.

Si $d\underline{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ i $d\underline{v} = dv_1 dv_2 dv_3$, les integrals

$$\iint_{D_x \times D_v} x_1^i x_2^j x_3^k v_1^\ell v_2^m v_3^n \, f(\underline{x},\underline{v},t) \, d\underline{x} \, d\underline{v}$$

existeixen per a qualsevol valor natural de i,j,k,l,m,n.

El nombre d'estrelles que en el temps t es troben en una posició entre $\underline{x}$ i $\underline{x}+d\underline{x}$, i tenen una velocitat compresa entre $\underline{v}$ i $\underline{v}+d\underline{v}$, vé donat per

$$d\mathcal{N} = f(\underline{x},\underline{v},t) \, d\underline{x} \, d\underline{v} \tag{1.1}$$

S'ha fet la suposició de que totes les estrelles tenen la mateixa massa (unitat), així, parlar de quantitat d'estrelles o de quantitat de massa serà equivalent.

Naturalment, la descripció de l'estat d'un conjunt d'estrelles a partir de la FDD és una idealització de la realitat. Per exemple, pel que fa a la continuitat de la FDD, en la galàxia existeixen forts corrents estel.lars, que contradiuen la hipòtesi de continuitat en les velocitats. No obstant, tots els fenòmens d'aquesta mena es poden considerar locals i, en general, despreciables.

L'estudi estadístic de les velocitats de les estrelles es realitza a partir dels diferents moments associats a la FDD, considerant a aquesta només com una funció de la velocitat ($\underline{x}$ i t fixats) (Ogorodnikov, 1965):

Si $N(\underline{x},t)$ és la massa d'estrelles per unitat de volum que hi ha en un entorn de la posició $\underline{x}$ en el temps t, és a dir,

$$N = N(\underline{x},t) = \int_{\underline{V}} f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} \qquad (1.2)$$

La normalització de la FDD s'aconsegueix multiplicant-la pel factor $\frac{1}{N}$.

Aleshores, el tensor de moments respecte a l'origen, d'ordre n, es defineix com

$$M_n = M_n(\underline{x},t) = \frac{1}{N}\int_{\underline{V}} (\underline{v})^n f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} \qquad (1.3)$$

on $(\underline{v})^n$ representa la potència tensorial n-èssima $(\underline{v}, \overset{-n-}{\dots}, \underline{v})$.

La velocitat mitja M_1 l'expressarem per

$$\hat{\underline{v}} = \hat{\underline{v}}(\underline{x},t) = \frac{1}{N}\int_{\underline{V}} \underline{v}\, f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} \qquad (1.4)$$

Definim, també, el tensor de moments respecte al centre, o moments centrats, d'ordre n, com

$$T_n = T_n(\underline{x},t) = \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} (\underline{v}-\hat{\underline{v}})^n \, f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} \qquad (1.5)$$

A les components de

$$\underline{u} = \underline{v} - \hat{\underline{v}} \qquad (1.6)$$

se les anomena velocitats residuals, o velocitats referides al centroide (punt de D_v corresponent a $\hat{\underline{v}}$).

Les components de M_n es poden escriure,
per a n=1,

$$m_i = \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} v_i \, f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v}$$

per a n=2,

$$m_{ij} = \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} v_i v_j \, f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v}$$

i així successivament.

Igualment, per a les components de T_n tenim, usant (1.6),
per a n=1,

$$\mu_i = \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} u_i \, f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v}$$

per a n=2,

$$\mu_{ij} = \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} u_i u_j \, f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v}$$

i anàlogament per a valors superiors de n.

Al tensor simètric de segon ordre T_2^{-1} , invers del T_2 , podem associar-li l' el.lipsoide de velocitats residuals

$$\underline{u}^t \cdot T_2^{-1} \cdot \underline{u} = 1$$

on $\underline{u}^t$ és el vector transposat de $\underline{u}$.

Aquest el.lipsoide, referit als seus eixos, serà

$$\frac{u_1^2}{\mu_{11}} + \frac{u_2^2}{\mu_{22}} + \frac{u_3^2}{\mu_{33}} = 1$$

és a dir, els seus semieixos són les velocitats residuals típiques.

És fàcil obtenir relacions entre els moments centrats T_n i els moments respecte a l'origen M_n . Les calcularem en els casos n=2 i n=3 .

Per a n=2,

$$\mu_{ij} = \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} (v_i - \hat{v}_i)(v_j - \hat{v}_j) f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} =$$

$$= \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} v_i v_j f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} - \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} \hat{v}_i v_j f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} -$$

$$- \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} v_i \hat{v}_j f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v} + \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} \hat{v}_i \hat{v}_j f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{v}$$

Per tant,

$$\mu_{ij} = m_{ij} - \hat{v}_i \hat{v}_j \tag{1.7}$$

Per a n=3 ,

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} (v_i-\hat{v}_i)\,(v_j-\hat{v}_j)\,(v_k-\hat{v}_k)\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} =$$

$$= \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} v_i v_j v_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} - \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} \hat{v}_i v_j v_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} -$$

$$- \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} v_i \hat{v}_j v_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} - \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} v_i v_j \hat{v}_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} +$$

$$+ \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} \hat{v}_i \hat{v}_j v_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} + \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} \hat{v}_i v_j \hat{v}_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} +$$

$$+ \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} v_i \hat{v}_j \hat{v}_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v} - \frac{1}{N}\int_{\underline{v}} \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k\; f(\underline{x},\underline{v},t)\; d\underline{v}$$

Per tant,

$$\mu_{ijk} = m_{ijk} - \hat{v}_i m_{jk} - \hat{v}_j m_{ik} - \hat{v}_k m_{ij} + 2\,\hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k \tag{1.8}$$

Les fórmules (1.7) i (1.8), a vegades, es necessiten invertides, és a dir, les components dels moments respecte a l'origen en funció de les dels moments centrats. La inversió de (1.7) és òbvia. Per a la inversió de (1.8), tan sols cal substituir els m_{rs} segons (1.7), per a obtenir,

$$m_{ijk} = \mu_{ijk} + \hat{v}_i \mu_{jk} + \hat{v}_j \mu_{ik} + \hat{v}_k \mu_{ij} + \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k \tag{1.9}$$

1.2 - Teorema de Jeans i equació fonamental de la dinàmica estel.lar

Considerem el cas més usual, en que el moviment de cada una de les estrelles vé regit pel següent sistema d'equacions en coordenades cartesianes:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} &= -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} U(\underline{x},t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

$U(\underline{x},t)$ és el potencial gravitatori, que és continu i té primera i segona derivada continues.

Acceptar el sistema (1.10) pressuposa que despreciem les forces que no són de caràcter gravitatori, com les degudes a col.lisions, pas d'una estrella prop d'una altra, etc. Només comptem amb les forces causades per la massa que genera el potencial.

Aquests tipus d'hipòtesis no constitueixen cap problema greu, al menys a l'entorn del sol. El temps de relaxació per a les estrelles a prop del sol és d'uns 10^{12} anys, mentre que el període de rotació al voltant del centre galàctic és d'uns 10^{8} anys. Per a que es puguin notar els efectes de desviació de la trajectòria d'una estrella, aquesta haurà de donar moltes voltes a la galàxia.

El sistema (1.10) és un sistema hamiltonià amb

$$H = H(\underline{x},\underline{v},t) = \frac{1}{2} v^2 + U(\underline{x},t)$$

i es pot escriure com

$$\frac{d}{dt}(\underline{x},\underline{v}) = g(\underline{x},\underline{v},t) \tag{1.11}$$

amb

$$g(\underline{x},\underline{v},t) = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}} H, -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} H \right)$$

Sigui $\phi_t(\underline{x},\underline{v})$ el flux associat al sistema representat per (1.11). És a dir, $\phi_t(\underline{x},\underline{v})$ és solució del dit sistema sota unes condicions inicials $\phi_o(\underline{x}_o,\underline{v}_o) = (\underline{x}_o,\underline{v}_o)$ (Arnold,1974). Aleshores, els punts de la forma $(\underline{x}(t),\underline{v}(t)) = \phi_t(\underline{x}_o,\underline{v}_o)$ determinen l'òrbita que passa per $(\underline{x}_o,\underline{v}_o)$. A més, com es verifica

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \frac{\partial}{\partial \underline{v}} H + \frac{\partial}{\partial \underline{v}}\left(- \frac{\partial}{\partial \underline{x}} H\right) = 0$$

el flux $\phi_t(\underline{x},\underline{v})$ preserva volum, és a dir, si $G \subset D_x \times D_v$ està acotat i té el volum definit, es compleix (Arnold,1978,p.68)

$$\text{volum}(\phi_o(G)) = \text{volum}(\phi_t(G)), \text{ per a tot } t \in R$$

Per tant, el jacobià del sistema és

$$\left| \frac{\partial \phi_t(\underline{x},\underline{v})}{\partial (\underline{x},\underline{v})} \right| = 1$$

Estudiem com és transportada pel flux la massa d'una regió $V \subset D_x \times D_v$ al passar d'un temps zero a un temps t (Kurth,1957). Com que el jacobià val la unitat, tenim,

$$\int_V f(\underline{x}_o,\underline{v}_o,0)\, d\underline{x}_o d\underline{v}_o = \int_{\phi_t(V)} f(\underline{x},\underline{v},t)\, d\underline{x}\, d\underline{v}$$

$$\int_V f(\underline{x}_o,\underline{v}_o,0)\, d\underline{x}_o d\underline{v}_o = \int_V f(\phi_t(\underline{x}_o,\underline{v}_o),\, t)\, d\underline{x}_o d\underline{v}_o$$

Tenim, doncs, que

$$\int_V (f(\underline{x}_o,\underline{v}_o,0) - f(\phi_t(\underline{x}_o,\underline{v}_o),t))\, d\underline{x}_o d\underline{v}_o = 0$$

Com aquesta igualtat és vàlida per a tota regió $V \subset D_x \times D_v$ i per a tot temps, concloïm que

$$f(\phi_t(\underline{x}_o,\underline{v}_o),t) = f(\underline{x}_o,\underline{v}_o,0) \tag{1.12}$$

per a tot $(\underline{x}_o,\underline{v}_o,t) \in D_x \times D_v \times R$. En conseqüència, $f(\phi_t,t)$ es manté constant sobre cada òrbita: f és funció de les integrals primeres de les equacions del moviment. Donades sis integrals primeres independents $I_1, \dots, I_6$ del sistema (1.11), es compleix,

$$f = f(I_1, \dots, I_6)$$

Aquest important resultat és conegut com teorema de Jeans. Ara bé, per a coneixer les integrals primeres, cal tenir prèviament la forma explícita del potencial $U(\underline{x},t)$. Com de moment no la sabem, farem algunes hipòtesis al respecte, que utilitzarem més endavant.

Si el potencial és estacionari, tenim $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ i $U=U(\underline{x})$. Conseqüentment,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} \tag{1.13}$$

Anant a (1.10), multiplicant escalarment les dues igualtats, en forma adequada, i utilitzant (1.13), obtenim

$$-\frac{d}{dt} U(\underline{x}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} v^2$$

Integrant, tenim la integral primera (de l'energia),

$$I_1 = v^2 + 2\,U(\underline{x}) = \text{const.}$$

Expressem $\underline{x}$ i $\underline{v}$ en coordenades cilîndriques:

$$\underline{x} = (\varpi, \theta, z)$$
$$\underline{v} = (\Pi, \Theta, Z)$$

Llavors, el potencial s'escriurà $U=U(\varpi,\theta,z,t)$ i el gradient s'expressarà com

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \varpi}, \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Tenint en compte que

$$\dot{\underline{x}} = (\dot{\varpi}, \varpi\dot{\theta}, \dot{z})$$
$$\ddot{\underline{x}} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\theta}^2, 2\dot{\varpi}\dot{\theta} + \varpi\ddot{\theta}, \ddot{z}) \tag{1.14}$$

podem escriure (1.10) de la segUent forma,

$$\dot{\underline{x}} = (\Pi, \Theta, Z)$$
$$\dot{\underline{v}} = \left(-\frac{\partial U}{\partial \varpi} + \frac{\Theta^2}{\varpi}, -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\Pi\Theta}{\varpi}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{1.15}$$

(Les coordenades cilîndriques les podem prendre de forma que l'eix z sigui perpendicular al plà galàctic, aquest determinat per $z = o$ i ϖ, θ seran les coordenades polars sobre aquest plà).

Suposem, ara, que el potencial presenta simetria cilîndrica. Aleshores, tenim que , $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$. Prenent només la segona component de $\dot{\underline{v}}$ en (1.15), es verifica,

$$\dot{\Theta} = -\frac{\dot{\varpi}\Theta}{\varpi}$$

que integrant, ens dóna la integral primera (de les àrees),

$$I_2 = \varpi \Theta = \text{const.}$$

Un darrer cas. Suposem el potencial separable, de la forma

$$U = U_1(\varpi, \theta, t) + U_2(z)$$

Llavors tindrem,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU_2}{dz}$$

Prenent en (1.15) la tercera component de $\dot{\underline{v}}$, veiem que

$$Z \frac{dZ}{dz} = \dot{Z} = - \frac{dU_2}{dz}$$

Integrem, i obtenim una altra integral primera,

$$I_3 = Z^2 + 2\, U_2(z) = \text{const.}$$

Per a obtenir l'equació fonamental de la dinàmica estel.lar , tornem a (1.12), que era una funció que es mantenia constant sobre cada òrbita. Derivant-la respecte al temps,

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} = 0 \qquad (1.16)$$

Aquest resultat és conegut, normalment, com teorema de Liouville i constitueix l'equació fonamental de la dinàmica estel.lar. Correspon a la hipòtesi que haviem fet sobre la no existència de col.lisions. Si en tinguéssim, la variació de f en el temps seria deguda a l'efecte de les col.lisions i tindriem l'equació de Boltzmann

(Mihalas, 1968) ,

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col.}$$

Usant, ara, (1.10), podrem escriure l'equació fonamental (1.16) en coordenades cartesianes,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} v_3 - \frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial v_3}\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0$$

Normalment, és més útil tenir-la expressada en coordenades cilíndriques, ja que en la majoria dels casos es treballa sota la hipòtesi d'aquest tipus de simetria. Recordant (1.15), podem escriure (1.16) en cilíndriques:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Pi \frac{\partial f}{\partial \varpi} + \frac{\Theta}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \theta} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \Pi}\left(\frac{\Theta^2}{\varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi}\right) - \frac{\partial f}{\partial \Theta}\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\Pi\Theta}{\varpi}\right) - \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

A partir d'aquesta equació, multiplicant per les diferents potències tensorials de $\underline{v}$ i integrant a tot D_v, obtindriem les anomenades equacions "hidrodinàmiques". Així eliminariem la FDD a canvi d'aconseguir relacions entre els moments dels diferents ordres. Tanmateix, tindriem més moments que equacions i mai podriem tancar el sistema. S'havia pensat que l'equació de Poisson podria servir per a tancar-lo, però les observacions han demostrat que entre les estrelles de la galàxia hi ha gran quantitat de pols i gas interestel.lars, de distribució desconeguda. En aquest cas, l'equació de Poisson seria

$$\Delta U = 4\pi G\,(N + N_{gas})$$

(on Δ és l'operador laplaciana i N_{gas} representa la densitat de gas i pols alhora) i per tant, no ens elimina cap antiga incògnita.

Ja que així no podem obtenir informació suficient sobre els moments (alguna se'n pot aconseguir introduïnt més hipòtesis), és aconsellable fer un estudi directe sobre la FDD. El farem tot seguit.

1.3 - Forma general de la funció de distribució a l'entorn del sol

Prenem una mostra prou gran d'estrelles situades a l'entorn del sol, de les quals coneixem amb bastant aproximació les components de les velocitats residuals, i per tant, la distribució de moments. Estudiarem de quin tipus ha de ser la FDD per tal de que es correspongui amb la distribució de moments.

En un entorn del sol, podem suposar que $\underline{x}$ es manté constant, per comparació amb les dimensions de la galàxia. Anàlogament, podem suposar que t és constant, ja que l'evolució de la galàxia és molt lenta. (Les referències temporals es prenen en comparació al període de rotació de les estrelles entorn al centre galàctic). En conseqüència, només considerarem la dependència de la FDD en la velocitat, però abans, ja que el teorema de Jeans assegura que la FDD és funció de les integrals primeres de les equacions del moviment, vegem quines d'aquestes integrals primeres seran vàlides en l'entorn del sol considerat i quines permeten explicar satisfactòriament la distribució de velocitats.

En un curt interval de temps, la forma de la galàxia no varia de manera apreciable. Això permet suposar que el potencial no depén del temps, és a dir, el potencial és estacionari:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad i \quad U = U(\underline{x})$$

Per tant, com ja s'havia vist, disposem de la integral primera I_1.

En coordenades cilíndriques l'escriurem

$$I_1 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 + 2\,U(\varpi,\theta,z) \tag{1.17}$$

Si la distribució de masses presenta simetria cilíndrica, el potencial també. Aleshores, es compleix

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{i} \qquad U = U(\varpi, z)$$

(En aquest sentit, Chandrasekhar(1942) va demostrar que si el sistema és estacionari, és a dir, no hi ha cap mena de dependència temporal, i la FDD és quadràtica en velocitats residuals, el potencial també presenta simetria cilíndrica).

Com ja sabem, quan el potencial posseeix simetria cilíndrica, el sistema admet la integral primera

$$I_2 = \varpi\Theta \tag{1.18}$$

Per altra banda, l'entorn del sol es troba molt a prop del plà galàctic, mentre que està lluny del centre de la galàxia. La component z de la posició és molt petita comparada amb la component ϖ. Per aquesta raó, la part del potencial que depén de la variable z es pot considerar com una pertorbació a la part depenent de ϖ i θ, de la forma

$$U(\varpi,\theta,z,t) = U_1(\varpi,\theta,t) + U_2(z)$$

En aquest cas podem recórrer a la integral primera

$$I_3 = Z^2 + 2\,U_2(z)$$

Vegem quins moments ens donaria una FDD, segons les integrals primeres (d'entre les anteriors) que utilitzessim.

Primerament, escriurem les components dels moments, definits en (1.3) i (1.5) :

Per a M_n ,

$$m_{pqr} = \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} v_1^p v_2^q v_3^r \; f(\underline{v}) \; d\underline{v} \tag{1.19}$$

(Com ja s'ha dit, només considerarem la dependència de f en $\underline{v}$, al treballar a l'entorn del sol).

Per a T_n ,

$$\mu_{pqr} = \frac{1}{N} \int_{\underline{v}} (v_1-\hat{v}_1)^p (v_2-\hat{v}_2)^q (v_3-\hat{v}_3)^r \; f(\underline{v}) \; d\underline{v} \tag{1.20}$$

amb $\hat{\underline{v}} = (\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3)$ segons (1.4). I si ho escribíssim en cilíndriques, posariem

$$\hat{\underline{v}} = (\Pi_o, \Theta_o, Z_o) \tag{1.21}$$

A partir d'ara, la discusió sobre els moments es farà fins als de quart ordre; el motiu és que per a moments d'ordre superior, els seus valors es confonen amb els seus errors. Les observacions encara no són prou precises.

Distingirem diversos casos i treballarem en cilíndriques:

a) Suposem que només fem ús de l'estacionarietat del potencial. En aquest cas,

$$f = \varphi(I_1)$$

Per (1.17), veiem que la FDD és funció parella en Π, Θ i Z; per tant, al calcular $\underline{\hat{v}} = M_1$ obtindrem $\Pi_o = \Theta_o = Z_o = 0$.

Aquest és un model que en promig resta inmòvil: cada punt serà un centroide.

Observant (1.20), veiem que, al ser $\underline{\hat{v}}=\underline{0}$, les variables Π, Θ, Z són permutables. Així, es verificarà,

$$\mu_{200} = \mu_{020} = \mu_{002}$$
$$\mu_{220} = \mu_{202} = \mu_{022}$$
$$\mu_{400} = \mu_{040} = \mu_{004}$$

i tots els moments centrats, que tinguin algún índex imparell, seran nuls. A més, com veurem posteriorment, es complirà la relació

$$\mu_{400} = 3\,\mu_{202} \qquad (1.22)$$

Aquesta distribució, esfèrica, no es correspón gens amb els valors obtinguts per observació, que es diuen més amb una distribució el.lipsoidal.

Necessitem alguna altra integral primera per a explicar-ho.

b) Si ens posem sota les hipòtesis de potencial estacionari i a simetria cilíndrica, tenim,

$$f = \varphi(I_1, I_2)$$

Observant (1.17) i (1.18), comprovem que la FDD és parella en Π i Z, lo qual mena, segons (1.19), al resultat $\Pi_o = Z_o = 0$, i en general, $\Theta_o \neq 0$. Correspondrà a un model de rotació pura, més semblant al cas real, que no pas l'anterior.

Com en I_1 les variables Π i Z són permutables i en I_2 no apareixen, pels moments parells, es satisfaran les relacions

$$\mu_{200} = \mu_{002} \quad , \quad \mu_{220} = \mu_{022} \quad , \quad \mu_{400} = \mu_{004} \tag{1.23}$$

i, pels moments d'ordre imparell,

$$\mu_{210} = \mu_{012} \tag{1.24}$$

En general, també seran diferents de zero, μ_{020}, μ_{030}, μ_{040} i μ_{202}.

Les relacions (1.23) i (1.24) continuen sense ser satisfactòries. És bó, però, que apareguin moments imparells no nuls. Fins fa alguns anys, era comunment acceptat que no hi haguessin moments d'ordre imparell, però els resultats obtinguts per Erickson(1975), i confirmats per Núñez(1981), no han deixat cap dubte de la seva existència.

En aquest cas b), al igual que en a), es verifica (1.22).

c) Introduïm la tercera i última de les hipòtesis, per a intentar explicar la distribució de velocitats. Junt amb les dues anteriors, inclourem la separabilitat del potencial. Aleshores,

$$f = \varphi(I_1, I_2, I_3)$$

La paritat de Π i Z en la FDD dóna, com abans, el resultat $\Pi_o = Z_o = 0$ i, en general, $\Theta_o \neq 0$. Continuem en el cas de rotació pura i els moments diferents de zero són els dotze següents,

$$\mu_{200} , \mu_{020} , \mu_{002} , \mu_{210} , \mu_{030} , \mu_{012}$$

$$\mu_{220} , \mu_{202} , \mu_{022} , \mu_{400} , \mu_{040} , \mu_{004}$$

Aquest és el mínim conjunt de moments que, segons Erickson(1975), podem suposar diferents de zero. Entre ells, es satisfan, aproximada - ment, les següents relacions:

$$\frac{\mu_{200}}{\mu_{002}} = \frac{\mu_{210}}{\mu_{012}} = \frac{\mu_{220}}{\mu_{022}} = \lambda \;, \qquad \frac{\mu_{400}}{\mu_{004}} = \lambda^2 \tag{1.25}$$

$$\frac{\mu_{200}}{\mu_{020}} = \frac{\mu_{202}}{\mu_{022}} = \eta \;, \qquad \frac{\mu_{400}}{\mu_{040}} = \eta^2 \tag{1.26}$$

amb λ i η diferents de 1. Observem que ja no es verifica (1.23), com passava en a) i b).

Abans de continuar, i per a il.lustrar un cas particular de c), que veurem posteriorment, anem a estudiar un tipus de FDD, que en podriem dir "quadràtic en dues components de les velocitats residuals", que dóna lloc a unes relacions entre els moments, de la forma que ne - cessitem.

Sigui, doncs,

$$f = \varphi(u_{i_1}^2 + \sigma u_{i_2}^2 \;,\; u_{i_3}) \tag{1.27}$$

amb

$$u_{i_j} = v_{i_j} - \hat{v}_{i_j} \;, \quad j = 1,2,3 \;; \quad \sigma \in R$$

Amb aquest canvi de variables, (1.20) s'expressarà com

$$\mu_{p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{N} \int_{\underline{u}} u_{i_1}^{p_1}\, u_{i_2}^{p_2}\, u_{i_3}^{p_3}\, \varphi(u_{i_1}^2 + \sigma u_{i_2}^2 \;,\; u_{i_3})\, d\underline{u} \tag{1.28}$$

La integral (1.28) només cal considerar-la quan p_1 i p_2 són parells o nuls, doncs en altre cas s'anularia.

Fem el canvi de variables,

$$u_{i_1} = \rho \cos \gamma \qquad u_{i_2} = \sigma^{-1/2} \rho \sin \gamma \qquad u_{i_3} = \zeta \qquad \left| \frac{\partial (u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3})}{\partial (\rho, \gamma, \zeta)} \right| = \sigma^{-1/2} \rho$$

i (1.28) es converteix en

$$\mu_{p_1 p_2 p_3} = \frac{\sigma^{-1/2}}{N} \sigma^{-\frac{p_2}{2}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho^{p_1+p_2} \zeta^{p_3} \varphi(\rho^2, \zeta) \rho \, d\rho \, d\zeta \int_0^{2\pi} (\cos\gamma)^{p_1} (\sin\gamma)^{p_2} \, d\gamma \qquad (1.29)$$

Ara bé, si per a p_1' i p_2' parells o nuls, tals que

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \qquad (1.30)$$

calculem $\mu_{p_1' p_2' p_3}$, tenim,

$$\mu_{p_1' p_2' p_3} = \frac{\sigma^{-1/2}}{N} \sigma^{-\frac{p_2'}{2}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho^{p_1'+p_2'} \zeta^{p_3} \varphi(\rho^2, \zeta) \rho \, d\rho \, d\zeta \int_0^{2\pi} (\cos\gamma)^{p_1'} (\sin\gamma)^{p_2'} \, d\gamma \qquad (1.31)$$

Per (1.30), les integrals dobles de (1.29) i (1.31) coincideixen. Al calcular-ne el quocient,

$$\frac{\mu_{p_1 p_2 p_3}}{\mu_{p_1' p_2' p_3}} = \sigma^{\frac{p_2'-p_2}{2}} \frac{\int_0^{2\pi} (\cos\gamma)^{p_1} (\sin\gamma)^{p_2} \, d\gamma}{\int_0^{2\pi} (\cos\gamma)^{p_1'} (\sin\gamma)^{p_2'} \, d\gamma} \qquad (1.32)$$

Ja que p_1, p_2, p_1', p_2' no són imparells, les funcions que apareixen sota les integrals de (1.32) tenen el mateix valor a cada quadrant i es poden escriure recorrent a la funció Beta d'Euler, definida com,

$$B(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\gamma)^{2\alpha-1} (\sin\gamma)^{2\beta-1} d\gamma \qquad (1.33)$$

Així, (1.32) quedarà,

$$\frac{\mu_{p_1p_2p_3}}{\mu_{p_1'p_2'p_3}} = \sigma^{\frac{p_2'-p_2}{2}} \frac{B\left(\frac{p_1+1}{2},\frac{p_2+1}{2}\right)}{B\left(\frac{p_1'+1}{2},\frac{p_2'+1}{2}\right)}$$

I expressant la funció Beta a partir de la Gamma d'Euler,

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (1.34)$$

tenim, per a p_1, p_2, p_1', p_2' parells o nuls,

$$\frac{\mu_{p_1p_2p_3}}{\mu_{p_1'p_2'p_3}} = \sigma^{\frac{p_2'-p_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{p_2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1'+1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{p_2'+1}{2}\right)} \qquad (1.35)$$

amb (1.30), $p_1+p_2=p_1'+p_2'$ (1).

Vegem algunes conseqüències de (1.35):

Si $p_1 = p_2'$ i $p_2 = p_1'$, (1.35) es converteix en

$$\frac{\mu_{p_1p_2p_3}}{\mu_{p_2p_1p_3}} = \sigma^{\frac{p_1-p_2}{2}} \qquad (1.36)$$

---

(1) De la mateixa forma, es demostraria per a una FDD una mica més general, de la forma $f = \varphi(|u_{i_1}|^m + \sigma|u_{i_2}|^m,\ u_{i_3})$, que sota les mateixes condicions, es verifica

$$\frac{\mu_{p_1p_2p_3}}{\mu_{p_1'p_2'p_3}} = \sigma^{\frac{p_2'-p_2}{m}} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1+1}{m}\right)\,\Gamma\left(\frac{p_2+1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1'+1}{m}\right)\,\Gamma\left(\frac{p_2'+1}{m}\right)}$$

Així, per exemple, si $f = \varphi(\Pi^2 + \eta(\Theta - \Theta_0)^2, Z)$, (1.36) serà (fent $p_1=p$, $p_2=q$ i $p_3=r$)

$$\frac{\mu_{pqr}}{\mu_{qpr}} = \eta^{\frac{p-q}{2}} \tag{1.37}$$

o bé, si $f = \varphi(\Pi^2 + \lambda Z^2, \Theta)$, (1.36) serà (fent $p_1=p$, $p_2=r$ i $p_3=q$)

$$\frac{\mu_{pqr}}{\mu_{rqp}} = \lambda^{\frac{p-r}{2}} \tag{1.38}$$

Fixem-nos en que les relacions (1.25) i (1.26) són uns casos particulars de (1.37) i (1.38).

També, (1.35) ens servirà per a demostrar la relació (1.22), que apareixia en a) i b), i fer una petita generalització. En efecte, observem que tant en a) com en b) teniem una FDD de la forma $f = \varphi(\Pi^2 + \lambda Z^2, \ldots)$ amb $\lambda = 1$. Llavors, aplicant (1.35) amb $p_1=4$, $p_2=0$, $p_1'=p_2'=2$ i $p_3=p_3'=p$, tenim,

$$\frac{\mu_{4p0}}{\mu_{2p2}} = \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/2)} = 3$$

En altre cas, amb $\lambda \neq 1$, obtindriem

$$\frac{\mu_{4p0}}{\mu_{2p2}} = 3\lambda \tag{1.39}$$

Aquesta darrera relació, amb $p=0$, és força concordant amb els resultats d'Erickson(1975).

Concloïm, doncs, en que per a satisfer-se (1.25),(1.26) i (1.39), caldria prendre la FDD com

$$f = \varphi(\Pi^2 + \eta(\Theta-\Theta_0)^2 + \lambda Z^2) \qquad (1.40)$$

que continua siguent un model de rotació pura. En particular, per a una distribució el.lipsoidal en velocitats residuals, com és (1.40), tenim, combinant (1.25), (1.26) i (1.39), la següent relació entre els moments de quart ordre (Orús,1975)

$$\frac{\sqrt{\mu_{040}\ \mu_{004}}}{\mu_{022}} = \frac{\sqrt{\mu_{400}\ \mu_{004}}}{\mu_{202}} = \frac{\sqrt{\mu_{400}\ \mu_{040}}}{\mu_{220}} = 3 \qquad (1.41)$$

Dissortadament, una FDD com la (1.40) no proporciona moments d'ordre imparell: la FDD és parella en les velocitats residuals . Per a esmenar aquest problema, estudiem un cas important de c), sota les mateixes hipòtesis.

Prenguem una FDD de la forma següent (Orús, 1980):

$$f = \varphi(I_1+(\lambda-1)I_3, I_2) = \hat{\varphi}(\Pi^2 + \lambda Z^2, \Theta) \qquad (1.42)$$

Segons el que acabem de discutir, (1.42) verificaria (1.25) i (1.39), és a dir, donaria lloc a les relacions

$$\frac{\mu_{200}}{\mu_{002}} = \frac{\mu_{210}}{\mu_{012}} = \frac{\mu_{220}}{\mu_{022}} = \lambda$$

$$\frac{\mu_{400}}{\mu_{004}} = \lambda^2 \quad \text{i} \quad \frac{\mu_{400}}{\mu_{202}} = 3\lambda$$

I a més a més, els moments μ_{020}, μ_{030} i μ_{040} serien, en general, diferents de zero.

Per tant, ja que totes aquestes relacions són satisfactòries, podem concloure que, amb les integrals primeres I_1, I_2 i I_3 i amb una FDD de la forma (1.42), tenim un model plausible per a explicar la distribució de velocitats en un entorn del sol.

Seguidament, detallarem un model,més concret i fonamental, per a la FDD. Posteriorment, serà utilitzat per a construïr una FDD a l'estil de (1.42).

1.4 - Distribució quadràtica en velocitats residuals

Inicialment, s'havia suposat que les estrelles de la galàxia es movien de forma aleatòria en totes direccions. Com les molècules d'un gas. D'acord amb la llei de Maxwell de la teoria cinètica dels gasos, la FDD ha de ser esfèrica en les velocitats residuals, és a dir,

$$f = \varphi(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = \varphi(u^2)$$

Observem que només depén del mòdul de la velocitat residual, i per tant, descriu un model isòtrop en l'espai de velocitats.

L'expressió final de la llei de Maxwell per a la FDD és la corresponent a una llei normal en tres variables, amb mitja zero i la mateixa desviació típica per a les tres:

$$\varphi(\underline{u}) = e^{-\frac{1}{2a^2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}$$

Una primera generalització de la distribució maxwelliana és la FDD d'Schwarzschild. En ella, les desviacions típiques són diferents per a cada variable:

$$f = \varphi(\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2)} \qquad (1.43)$$

Relacionant-ho amb el que s'ha dit en l'apartat anterior , la distribució de Maxwell és tal que, si acceptem els valors $\Pi_o = \Theta_o = Z_o = 0$, la FDD és del tipus descrit en el cas a) de l'apartat anterior: $f = \varphi(I_1)$. I si suposem $\Pi_o = Z_o = 0$ i $\Theta_o \neq 0$, ens trobem en el cas b): $f = \varphi(I_1, I_2)$. En aquest segon cas, tenim, més en concret,

$$f = \varphi(I_1 - 2\alpha I_2)$$

ja que

$$I_1 - 2\alpha I_2 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 + 2U - 2\alpha\varpi\Theta =$$
$$= \Pi^2 + (\Theta - \alpha\varpi)^2 + Z^2 + 2U - \alpha^2\varpi^2$$

En conseqüència, $\Theta_o = \alpha\varpi$, cas particular del model de Oort-Linblad ($\Theta_o = \Theta_o(\varpi)$), en el que tenim rotació rígida i la velocitat angular és justament α. Notem que aquest model, al no estar Θ_o acotat, presentarà problemes.

Vegem, ara, com s'han de combinar les integrals primeres per a donar lloc a una FDD del tipus (1.40). Per a qualsevol funció d'aquesta classe, i en particular per a una Schwarzschild amb $\Pi_o = Z_o = 0$ i $\Theta_o \neq 0$, es compleix

$$f = \varphi(I_1 + (\lambda - 1)I_3 + 2\alpha I_2 + \beta I_2^2) \qquad (1.44)$$

En efecte,

$$I_1 + (\lambda-1)I_3 + 2\alpha I_2 + \beta I_2^2 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 + 2U + (\lambda-1)Z^2 + 2(\lambda-1)U_2 + 2\alpha\varpi\Theta + \beta\varpi^2\Theta^2 =$$

$$= \Pi^2 + (1+\beta\varpi^2)(\Theta + \frac{\alpha\varpi}{1+\beta\varpi^2})^2 + \lambda Z^2 + 2(U_1 + \lambda U_2) - \frac{(\alpha\varpi)^2}{1+\beta\varpi^2}$$

És a dir, considerant només la dependència en les velocitats,

$$I_1 + (\lambda-1)I_3 + 2\alpha I_2 + \beta I_2^2 = \Pi^2 + \eta(\Theta - \Theta_o)^2 + \lambda Z^2$$

amb

$$\eta = 1+\beta\varpi^2 \qquad (1.45)$$

$$\Theta_o = -\frac{\alpha\varpi}{1+\beta\varpi^2} \qquad (1.46)$$

Així, per la correspondència entre (1.40) i (1.44), que acabem de provar, podem afirmar que (1.44) verifica (1.25), (1.26) i (1.39).

Fixem-nos, també, en la forma de Θ_o,(1.46). Aquesta és més acceptable que no pas la que havíem vist darrerament. Per a ϖ petits es comporta com una recta que passa per l'origen i, per a valors suficientment grans de ϖ, tendeix assimptòticament a zero en forma hiperbòlica (Chandrasekhar, 1942, p.123).

Les funcions de distribució de Maxwell i Schwarzschild són una particularització de la distribució quadràtica en velocitats residuals (o d'Schwarzschild generalitzada), de la qual desenrotllarem seguidament el càlcul dels moments centrats. Aquesta classe de distribució és bàsica en l'estudi estadístic de les velocitats, ja que proporciona un model senzill, i alhora fructífer, per a tractar el problema. Després serà fàcil afegir-hi pertorbacions i completar l'estudi.

Continuant suposant que els valors de $\underline{x}$ i t es mantenen fixats, definim

$$f = \psi(Q) \quad , \quad Q = \underline{u}^t . A . \underline{u} \qquad (1.47)$$

on Q és una forma quadràtica definida positiva i A és un tensor simètric de segon ordre, constant.

Segons (1.5), les components dels moments centrats d'ordre n seran, posades explícitament en funció de $\underline{u}$, les de

$$T_n = \frac{1}{N} \int_{\underline{u}} (\underline{u})^n \; \psi(Q) \; d\underline{u} \qquad (1.48)$$

Efectuant un canvi de base per a convertir Q en una esfera, definim una nova variable $\underline{w}$, que ha de complir,

$$\underline{u} = B.\underline{w}$$

i

$$B^t.A.B = I \qquad (1.49)$$

Siguent I el tensor unitat. Si això es verifica, obtenim el que desitjavem:

$$Q = \underline{u}^t.A.\underline{u} = \underline{w}^t.B^t.A.B.\underline{w} = \underline{w}^t.I.\underline{w} = w^2$$

El jacobià d'aquesta transformació el calculem aïllant A en (1.49) i prenent determinants:

$$A = (B^t)^{-1}.\ B^{-1}$$

$$A^{-1} = B.B^t \qquad (1.50)$$

per tant,

$$\frac{1}{|A|} = |B|^2$$

o bé,

$$|B| = \frac{1}{|A|^{1/2}} \qquad (1.51)$$

(pels tensors, les barres signifiquen determinants) (Orús, 1952).

Ara, podem escriure (1.48) com

$$T_n = \frac{1}{N\,|A|^{1/2}} \int_{\underline{w}} (B.\underline{w})^n \, \psi(w^2) \, d\underline{w}$$

I per raons de simetria, els moments d'ordre imparell s'anularan. Els moments diferents de zero seran:

Moment d'ordre zero,

$$\mu_o = \frac{1}{N\,|A|^{1/2}} \int_{\underline{w}} \psi(w^2) \, d\underline{w} \qquad (1.52)$$

Moments de segon ordre,

$$\mu_{ij} = \frac{B_{i\alpha} B_{j\beta}}{N\,|A|^{1/2}} \int_{\underline{w}} w_\alpha w_\beta \, \psi(w^2) \, d\underline{w} \qquad (1.53)$$

Moments de quart ordre,

$$\mu_{ijkl} = \frac{B_{i\alpha} B_{j\beta} B_{k\gamma} B_{l\delta}}{N\,|A|^{1/2}} \int_{\underline{w}} w_\alpha w_\beta w_\gamma w_\delta \, \psi(w^2) \, d\underline{w} \qquad (1.54)$$

Els moments d'ordres superiors no entren en discusió, com ja hem dit.

Les integrals (1.52), (1.53) i (1.54) es poden expressar, de forma general, a partir de

$$K_{pqr} = \int_{\underline{w}} w_1^p \, w_2^q \, w_3^r \, \psi(w^2) \, d\underline{w} \qquad (1.55)$$

amb p, q i r positius i parells o nuls, tals que p+q+r=n.

Per a calcular (1.55), passem a coordenades esfèriques (w,δ,ε). D'aquesta forma,

$$w_1 = w \cos\delta \ \cos\varepsilon$$
$$w_2 = w \cos\delta \ \sin\varepsilon \qquad\qquad \left|\frac{\partial(w_1,w_2,w_3)}{\partial(w,\delta,\varepsilon)}\right| = w^2 \cos\delta$$
$$w_3 = w \sin\delta$$

Per les condicions sobre p,q i r, K_{pqr} prendrà el mateix valor a cada quadrant, i (1.55) es convertirà en

$$K_{pqr} = 8\int_0^{\pi/2} (\cos\delta)^{p+q+1}(\sin\delta)^r d\delta \int_0^{\pi/2} (\cos\varepsilon)^p(\sin\varepsilon)^q d\varepsilon \int_0^{\infty} w^{p+q+r+2}\psi(w^2)dw$$

Les dues primeres integrals les calcularem mitjançant la funció Beta d'Euler, com ja s'ha fet en un altre apartat, i expressarem aquesta en funció de la Gamma (fórmules (1.33) i (1.34)). Per a la darrera integral, si tenim en compte que la transformada de Mellin de la funció $\psi(Q)$ es defineix com (Colombo,1959)

$$\Psi(m) = \int_0^{\infty} Q^{m-1}\ \psi(Q)\ dQ \qquad (1.56)$$

podem escriure,

$$\int_0^{\infty} w^{n+2}\psi(w^2)\ dw = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (w^2)^{\frac{n+1}{2}}\ \psi(w^2)\ d(w^2) = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{n+3}{2}\right) \qquad (1.57)$$

Si per a simplificar, notem

$$\Psi_n \equiv \Psi\left(\frac{n+3}{2}\right) \qquad (1.58)$$

tenim, finalment,

$$K_{pqr} = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\ \Gamma(\frac{q+1}{2})\ \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q+r+3}{2})}\ \Psi_n \qquad (1.59)$$

K_{pqr} és simètric respecte a qualsevol permutació d'índexs.

Aplicant aquests resultats, calculem els diversos moments centrats.

$$\mu_o = \frac{1}{N|A|^{1/2}}\ K_{ooo} = \frac{1}{N|A|^{1/2}}\ \frac{(\Gamma(1/2))^3}{\Gamma(3/2)}\ \Psi_o \qquad (1.60)$$

Amb la condició de normalització (μ_o=1), determinem N.

$$N = \frac{2\pi}{|A|^{1/2}}\ \Psi_o \qquad (1.61)$$

Pels de segon ordre,

$$K_{200} = \frac{\Gamma(3/2)\ (\Gamma(1/2))^2}{\Gamma(5/2)}\ \Psi_2 = \frac{2\pi}{3}\ \Psi_2$$

Substituint a (1.53), utilitzant la delta de Kronecker i recordant (1.61), tenim

$$\mu_{ij} = \frac{B_{i\alpha}\ B_{j\beta}}{N|A|^{1/2}}\ \delta_{\alpha\beta}\frac{2\pi}{3}\Psi_2 = \frac{1}{3}\ \frac{\Psi_2}{\Psi_0}\ B_{i\alpha}B_{j\alpha}$$

Però, per (1.50), $B_{i\alpha}B_{j\alpha} = B_{i\alpha}B^{t}_{\alpha j} = A^{-1}_{ij}$. Així, els moments de segon ordre es podran escriure com

$$\mu_{ij} = \frac{1}{3}\frac{\Psi_2}{\Psi_0}\,A^{-1}_{ij} \tag{1.62}$$

Finalment, pels moments de quart ordre, ens valem d'un tensor isòtrop de quart ordre per a expressar-los. La seva forma més general és (Spain, 1960,p.97)

$$t_{\alpha\beta\gamma\delta} = a\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + b\,\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} + c\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma}$$

Ens interessa que els valors d'aquesta expressió siguin: 3 si tots els índexs són iguals entre sí, 1 si són iguals dos a dos i 0 en els casos restants. Per a això, cal prendre $a=b=c=1$.

Sigui, doncs,

$$J_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma} \tag{1.63}$$

Les integrals de (1.55), diferents de zero, seran,

$$K_{400} = \frac{\Gamma(5/2)(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma(7/2)}\,\Psi_4 = \frac{2\pi}{5}\,\Psi_4$$

$$K_{220} = \frac{(\Gamma(3/2))^2\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(7/2)}\,\Psi_4 = \frac{2\pi}{15}\,\Psi_4$$

Tenint-ho en compte, (1.54) es converteix en

$$\mu_{ijkl} = \frac{B_{i\alpha}B_{j\beta}B_{k\gamma}B_{l\delta}}{N|A|^{1/2}} J_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{2\pi}{15} \Psi_4$$

Desenrotllant aquesta expressió segons (1.61) i (1.63), tenim,

$$\mu_{ijkl} = \frac{2\pi}{15} \frac{\Psi_4}{N|A|^{1/2}} (B_{i\alpha}\delta_{\alpha\beta}B^t_{\beta j}B_{k\gamma}\delta_{\gamma\delta}B^t_{\delta l} +$$

$$+ B_{i\alpha}\delta_{\alpha\gamma}B^t_{\gamma k}B_{j\beta}\delta_{\beta\delta}B^t_{\delta l} + B_{i\alpha}\delta_{\alpha\delta}B^t_{\delta l}B_{j\beta}\delta_{\beta\gamma}B^t_{\gamma k})=$$

$$= \frac{1}{15} \frac{\Psi_4}{\Psi_0} (B_{i\alpha}B^t_{\alpha j}B_{k\gamma}B^t_{\gamma l} + B_{i\alpha}B^t_{\alpha k}B_{j\beta}B^t_{\beta l} + B_{i\alpha}B^t_{\alpha l}B_{j\beta}B^t_{\beta k})$$

i per (1.50),

$$\mu_{ijkl} = \frac{1}{15} \frac{\Psi_4}{\Psi_0} (A^{-1}_{ij}A^{-1}_{kl} + A^{-1}_{ik}A^{-1}_{jl} + A^{-1}_{il}A^{-1}_{jk})$$

que es pot escriure, utilitzant (1.62), com (Orús,1977,p.47)

$$\mu_{ijkl} = \frac{3}{5} \frac{\Psi_4 \Psi_0}{\Psi_2^2} (\mu_{ij}\mu_{kl} + \mu_{ik}\mu_{jl} + \mu_{il}\mu_{jk}) \qquad (1.64)$$

Hem trobat, ja, les expressions generals pels moments centrats associats a una FDD quadràtica en velocitats residuals. La particularització a la FDD d'Schwarzschild és inmediata:

D'acord amb (1.43) i (1.47) tindrem,

$$A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

i

$$\psi(Q) = e^{-\frac{1}{2}Q}$$

amb la seva transformada de Mellin (1.56),

$$\Psi(p) = 2^p\, \Gamma(p) \tag{1.65}$$

doncs, recordant que la funció Gamma d'Euler compleix

$$2\int_0^\infty w^q\, e^{-\frac{1}{2}w^2}\, dw = 2^{\frac{q+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \tag{1.66}$$

i que segons (1.57) la integral de l'esquerra és $\Psi\left(\frac{q+1}{2}\right)$, fent $p = \frac{q+1}{2}$ obtenim (1.65).

Calculem N. Com $\Psi_0 = \Psi(3/2) = 2^{3/2}\, \Gamma(3/2)$, per (1.61) tenim

$$N = \frac{(2\pi)^{3/2}}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/2}}$$

Calculem els moments de segon ordre (només diferents de zero els d'índexs repetits). Com $\Psi_2 = \Psi(5/2) = 2^{5/2}\, \Gamma(5/2)$, tenint en compte el resultat anterior i (1.62), es verificarà per a i = 1,2,3

$$\mu_{ii} = \frac{2^{5/2}\, \Gamma(5/2)}{2^{3/2}\, \Gamma(3/2)}\, \frac{A^{-1}_{ii}}{3} = A^{-1}_{ii} = \alpha_i^{-1} \tag{1.67}$$

Calculem els moments de quart ordre (només no nuls els d'índexs iguals o repetits dos a dos). Com $\Psi_4 = \Psi(7/2) = 2^{7/2}\,\Gamma(7/2)$, utilitzant (1.64), tenim, per a i=1,2,3 :

$$\mu_{iiii} = \frac{3}{5}\,\frac{2^{7/2}\;\Gamma(7/2)\;2^{3/2}\;\Gamma(3/2)}{(2^{5/2}\;\Gamma(5/2))^2}\;3\,\mu_{ii}^2 = 3\,\mu_{ii}^2 \qquad (1.68)$$

que per (1.67) es transforma en

$$\mu_{iiii} = 3\alpha_i^{-2} \qquad (1.69)$$

De forma semblant, s'obté, per a i=1,2,3; j=1,2,3; i≠j :

$$\mu_{iijj} = \mu_{ii}\,\mu_{jj} = \alpha_i^{-1}\;\alpha_j^{-1} \qquad (1.70)$$

Les relacions (1.68) i (1.70) representen un impediment a l'hora de donar per bona la FDD d'Schwarzschild: els valors

$$\frac{\mu_{iiii}}{\mu_{ii}^2} = 3 \qquad (1.71)$$

$$\frac{\mu_{iijj}}{\mu_{ii}\mu_{jj}} = 1 \qquad (1.72)$$

que es dedueixen d'aquelles, s'escapen dels valors que dóna Erickson(1975).

En resum, una FDD d'Schwarzschild no ens complau, pel que fa a l'ajust total dels moments centrats d'ordre parell, però sí que ens satisfaria una distribució d'Schwarzschild generalitzada (1.47), com la (1.40), per a la qual hem vist, en l'apartat anterior, les relacions entre els moments que generaria, i en el present apartat, com calcular-los.

Com a conseqüència dels resultats anteriors, ens proposem determinar una FDD, que sigui pròxima a una distribució quadràtica en velocitats residuals, en el sentit que serà superposició d'una Schwarzschild generalitzada, dominant, i una funció, de menor incidència, però que proporcionarà l'assimetria.

Cal mencionar que la descripció estadística, que fem, és de tipus clàssic, és a dir, segons l'estadística de Maxwell-Boltzmann. Això no treu que, en algún cas molt particular, hi ha qui ha utilitzat alguna de les estadístiques no clàssiques, Bose-Einstein o Fermi-Dirac. Les tres es poden considerar un cas particular d'una distribució més general.

L'adopció de distribucions quadràtiques és un fet que ha ocasionat diverses crítiques (Perek, 1962, p. 217). Una de les més considerables, al menys des del punt de vista teòric, és el fet de que un model el.lipsoidal autogravitant no pot tenir una massa finita. Això ha portat a suposar models en que les velocitats només poden prendre valors dins un recinte acotat de R^3, prenent funcions de distribució de la forma,

$$f = (C-I_1)^n \, g(I_1, I_2, I_3) \;, \qquad \text{si } I_1 \leq C$$

siguent C una constant positiva, i $f = 0$ en altre cas (Kurth, 1957, p. 130).

Un altre cas interessant, en aquesta mateixa línia, és el proposat per Fricke (1952). Suposa el sistema estel.lar estacionari, lo qual acota superiorment les velocitats, doncs si una estrella tingués una velocitat superior a la d'escapament, fugiria, per a sempre, del sistema. Sota aquesta hipòtesi i la de sistema autogravitant, proposa una FDD de la forma següent:

$$f = \sum_{i,k} c_{ik} I_1^i I_2^k$$

Com que hem vist que existeix una altre integral primera, I_3, independent de I_1 i I_2, aquesta darrera FDD es podria generalitzar a combinacions de productes de potències d'aquestes tres integrals primeres.

Actualment, aquestes oposicions no es poden tenir massa en consideració, ja que ni la hipòtesi de sistema estacionari és necessària, ni la de sistema autogravitant. Respecte a aquesta última, ja hem dit, al final del segon apartat, que a més de la massa d'estrelles tenim gas i pols interestel.lars, en gran quantitat, i no en coneixem la distribució.

Abans de passar a la construcció de la FDD, que ens interessa, veurem un capitol de recursos matemàtics, que serà l'eina bàsica, que permetrà aconseguir el que voliem. Donarem un tractament més general al problema.

2 - Base ortogonal en un espai de funcions de quadrat integrable

2.1 - Sistemes de polinomis ortogonals

L'espai dels polinomis en la variable real x, a coeficients reals, és un espai vectorial real respecte a les operacions habituals de suma i producte per un escalar. En aquest espai farem les següents consideracions.

Sobre un interval $I \subseteq R$ definim una funció real $w(x)$, positiva o nul.la i continua gairebé pertot. A una funció com $w(x)$ se la anomena funció pes, o simplement pes.

Suposarem que la integral

$$\int_I w(x)\ P(x)\ dx$$

és convergent per a qualsevol polinomi $P(x)$.

Es pot introduïr un producte escalar, respectant les consideracions anteriors, de la manera següent:

Donats dos polinomis, $P(x)$ i $Q(x)$, el seu producte escalar serà

$$(P,Q) = \int_I w(x)\ P(x)\ Q(x)\ dx \tag{2.1}$$

És, en efecte, un producte escalar, doncs compleix les propietats conmutativa, distributiva respecte a l'adició i

$$(P,P) = \int_I w(x)\ (P(x))^2\ dx$$

és positiu si $P(x)$ és diferent de zero i nul en cas contrari.

Considerem una familia de polinomis $P_0, P_1, \ldots ,P_n$, on el subíndex denota el grau del polinomi. Una tal familia es diu que forma un sistema ortogonal si es verifica

$$(P_i,P_j) = 0 , \qquad i \neq j \tag{2.2}$$

(Per abreviar, es diu que els polinomis són ortogonals).

Si es compleix

$$(P_i,P_j) = \delta_{ij}$$

direm que el sistema és ortonormal.

En general, prendrem els polinomis $P_i(x)$ mònics (coeficient de la potència més alta igual a la unitat).

Òbviament,una familia de polinomis $P_0, P_1, \ldots ,P_n$ forma una base de l'espai vectorial dels polinomis considerats, doncs, donada la base $\{ 1, x, \ldots , x^n \}$, tenim, si

$$(x^j) = (1,x,\ldots,x^n)^t$$

i

$$(P_i) = (P_0,P_1,\ldots,P_n)^t$$

que es verifica

$$(P_i) = (B^i_j).(x^j) \tag{2.3}$$

on (B^i_j) representa la matriu de coeficients B^i_j , que és una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal. Per tant, la matriu de canvi de base és regular i la familia considerada constitueix, també, una base.

D'aquesta forma, tot polinomi $P(x)$, de grau n, es pot expressar com

$$P(x) = \sum_i c_i P_i(x) , \qquad c_i \in R,\ i \leq n$$

Si a més a més, la familia de polinomis és ortogonal, multiplicant escalarment per P_j els dos membres de la igualtat anterior, tenim,

$$(P_j, P) = c_j (P_j, P_j)$$

$$c_j = \frac{(P_j, P)}{(P_j, P_j)}$$

que seria la forma de calcular els coeficients anteriors.

Donat el pes $w(x)$ i l'interval $I \subseteq R$, el sistema de polinomis ortogonals que determinen és únic, excepte un factor multiplicatiu. La demostració d'aquesta proposició es fa per construcció de la familia en qüestió (per a polinomis mònics) i és l'anomenat mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt: La familia formada per

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0$$

....

$$P_n = x^n - \sum_{j<n} \frac{(x^n, P_j)}{(P_j, P_j)} P_j$$

és el sistema ortogonal desitjat.

Repassem, ara, algunes propietats dels polinomis ortogonals (Hochstadt, 1973).

i) Tots els zeros estan a I i són simples.

ii) Existeix una fòrmula de recurrència:

$$P_n(x) = (x+u_n)\, P_{n-1}(x) + v_n\, P_{n-2}(x)$$

amb

$$u_n = - \frac{(x\, P_{n-1}, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})}$$

$$v_n = - \frac{(x\, P_{n-1}, P_{n-2})}{(P_{n-2}, P_{n-2})}$$

iii) Entre dos zeros de P_n existeix un únic zero de P_{n+1}. Els altres zeros estan, un per sobre i l'altre per sota dels de P_n.

Les propietats, que segueixen, fan referència a l'aproximació d'una funció per un polinomi, però abans, calen algunes puntualitzacions.

Sigui $L^2_w(I)$ (simplificant, L^2) l'espai de les funcions reals $f(x)$ tals que les integrals

$$\int_I w(x)\; f(x)\; dx$$

i

$$\int_I w(x)\; (f(x))^2\; dx$$

existeixen. L^2 s'anomena espai de les funcions de quadrat integrable en l'interval I i respecte al pes $w(x)$.

Si f(x) i g(x) són de L^2, llavors la desigualtat d'Schwarz,

$$\left|\int_I w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx\right| \leq \left\{\int_I w(x)(f(x))^2\ dx\right\}^{1/2} \left\{\int_I w(x)(g(x))^2\ dx\right\}^{1/2}$$

assegura l'existència de la integral

$$\int_I w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx$$

D'aquesta manera, $f+g \in L^2$ i $rf \in L^2$, per a tot $r \in R$. Aquestes operacions dónen a L^2 una estructura d'espai vectorial real. També podem definir un producte escalar, semblantment a com s'ha fet abans:

$$(f,g) = \int_I w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx \qquad (2.4)$$

Aquesta definició satisfà les propietats de producte escalar i defineix una norma sobre L^2:

$$\| f(x) \| = (f,f)^{1/2}$$

Amb la distància associada a aquesta norma, L^2 és complet, i per tant, té estructura d'espai de Hilbert (Kolmogórov-Fomín, 1975).

Prosseguim amb les propietats.

iv) Donada una funció f(x) de L^2 i una familia de polinòmis ortogonals P_o, P_1, ... , P_n , existeix un polinomi $\bar{P}(x)$, de grau n, que fa mínim

$$\| f(x) - \bar{P}(x) \|$$

per a tot polinomi $\bar{P}(x)$ de grau n. Aquest polinomi P(x), vé donat per

$$P(x) = \sum_{i\leq n} c_i \, P_i(x)$$

amb

$$c_i = \frac{(f,P_i)}{(P_i,P_i)} \qquad (2.5)$$

Aquest polinomi s'anomena "de millor aproximació" de la funció f(x), o d'aproximació mínimo-quadràtica de f(x).

v) Una familia infinita de polinomis ortogonals, $P_o, \ldots, P_n, \ldots$ es diu que forma un sistema complet en L^2 si donada una funció $f\in L^2$ es verifica

$$\left\| f - \sum_{i\leq n} c_i \, P_i \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Els coeficients c_i són els donats per (2.5).

Si I està acotat, qualsevol familia infinita de polinomis ortogonals forma un sistema complet.

Si I=R, els polinomis d'Hermite (que veurem posteriorment) són un sistema complet respecte al pes $w(x)= e^{-x^2}$. Això significa que qualsevol funció de quadrat integrable en R, amb pes unitat ($f\in L^2(R)$), pot expressar-se a partir de la base ortogonal de funcions de $L^2(R)$ que forma la familia

$$\left\{ H_i(x) \, e^{-x^2} \right\}, \qquad i=0,1,\ldots,n,\ldots$$

siguent $H_i(x)$ el i-èssim polinomi d'Hermite.

Si $I=R^+$(semirecta positiva), els polinomis de Laguerre generalitzats constitueixen un sistema complet respecte al pes $w(x)=x^\alpha e^{-x}$. Per tant, qualsevol funció de $L^2(R^+)$ serà expressable a partir de la base ortogonal de funcions d'aquest espai, que forma la familia

$$\left\{ L_i^\alpha(x)\ x^\alpha e^{-x} \right\}, \qquad i=0,1,\ldots,n,\ldots$$

representant $L_i^\alpha(x)$ el i-èssim polinomi de Laguerre generalitzat.

Aquesta cinquena propietat serà la que donarà generalitat a les FDD que trobarem.

Als polinomis ortogonals se'ls hi pot associar una funció, anomenada generatriu, que els caracteritza plenament. Considerant la familia de polinomis ortogonals de sempre, la seva funció generatriu associada es defineix com la sèrie entera de t, en un cert domini D,

$$g(x,t) = \sum_{n\geq 0} a_n\ P_n(x)\ t^n$$

Donada $g(x,t)$, els polinomis $P_n(x)$ són ortogonals en l'interval $I\subseteq R$, respecte al pes $w(x)$ si, i només si, la integral

$$J=J(t,s)= \int_I w(x)\ g(x,t)\ g(x,s)\ dx \qquad (2.7)$$

depèn, només, del producte ts.

Vegem-ho. Per (2.6) tenim,

$$J= \int_I w(x) \sum_n a_n P_n(x) t^n \sum_m a_m P_m(x) s^m\ dx = \sum_{n,m} a_n a_m t^n s^m (P_n,P_m)$$

Tal com està escrit, és evident que $J=J(ts)$ si, i només si, es verifica $(P_n,P_m)=0$, $n\neq m$, que és la definició d'ortogonalitat.

Si en aquesta darrera sèrie fem $ts=y$, en el cas de polinomis ortogonals tindrem

$$J(y) = \sum_{n\geq 0} a_n^2 \, (P_n,P_n) \, y^n$$

i el coeficient de la potència n-èssima de y ens permetrà calcular el valor de (P_n,P_n). En efecte, si

$$b_n = a_n^2 \, (P_n,P_n)$$

aleshores,

$$(P_n,P_n) = \frac{b_n}{a_n^2} \tag{2.8}$$

2.2 - Un cas particular d'aproximació

El problema, que en el capitol que segueix haurem de resoldre, es tracta, en el present apartat, de forma general.

Considerem una funció $f(x) = g(x)\, w(x)$, tal que $w(x)$ compleixi totes les propietats de funció pes en $I\subseteq R$ i $g(x)$ sigui de l'espai $L_w^2(I)$. Si es verifiquen n+1 relacions de la forma

$$R_m = \int_I x^m \, f(x) \, dx \, , \qquad m=0,1,\ldots,n \tag{2.9}$$

llavors, el polinomi $P(x)$, de grau n, de millor aproximació de $g(x)$ respecte al pes $w(x)$, és, justament, el que compleix

$$R_m = \int_I x^m P(x)\, w(x)\, dx \,, \qquad m=0,1,\dots,n \qquad (2.10)$$

Veurem, també, com es calcula P(x).

En efecte, sigui $\{ P_i \}$, $i \geq o$, la familia de polinomis ortogonals respecte al pes w(x), en l'interval I. N'hi haurà prou en veure, en virtud de la propietat iv) de l'apartat 2.1, que el polinomi P(x) , que satisfà (2.10), escrit en la forma

$$P(x) = \sum_{i \leq n} c_i P_i(x) \qquad (2.11)$$

verifica

$$c_i \,(P_i, P_i) = (g, P_i)$$

Calculem els coeficients c_i per tal de que es compleixi (2.10). Segons (2.3),

$$P_i(x) = \sum_{j \leq i} B_j^i \, x^j$$

o bé, invertint, ja que (B_j^i) és regular,

$$x^j = \sum_{i \leq j} \bar{B}_i^j \, P_i(x) \qquad (2.12)$$

siguent $(\bar{B}_i^j) = (B_j^i)^{-1}$. Això equival a dir,

$$\sum_j B_j^i \; \bar{B}_k^j = \delta_{ik} \qquad (2.13)$$

Llavors, substituïnt (2.11) i (2.12) a (2.10), tenim

$$R_m = \int_I \Big(\sum_{j\le m} \bar{B}_j^m P_j(x)\Big) \Big(\sum_{i\le n} c_i P_i(x)\Big) w(x)\, dx$$

i tenint en compte l'ortogonalitat dels polinomis P_i,

$$R_m = \sum_{j\le m} \bar{B}_j^m c_j (P_j,P_j) \qquad (2.14)$$

Ara bé, substituïnt (2.12) a (2.9), tenint en compte que $f=gw$,

$$R_m = \sum_{k\le m} \bar{B}_k^m (g,P_k) \qquad (2.15)$$

Igualant (2.14) i (2.15), multiplicant ambdós membres per B_m^l i sumant segons m, tenim,

$$\sum_m B_m^l \sum_j \bar{B}_j^m c_j (P_j,P_j) = \sum_m B_m^l \sum_k \bar{B}_k^m (g,P_k)$$

$$\sum_j \sum_m B_m^l \bar{B}_j^m c_j (P_j,P_j) = \sum_k \sum_m B_m^l \bar{B}_k^m (g,P_k)$$

Finalment, servint-nos de (2.13), arribem a

$$c_l (P_l,P_l) = (g,P_l) , \qquad l=0,\dots,n$$

que és el que voliem demostrar.

A més, per a calcular els coeficients c_j del polinomi P(x) a

(2.11), només cal invertir el sistema d'equacions, que constitueix (2.14), per als diferents valors de m; en efecte,

$$c_j = \frac{1}{(P_j,P_j)} \sum_{m\leq j} B_m^j R_m \,, \qquad j=0,\ldots,n \tag{2.16}$$

Aquest nou sistema tindrà sempre solució, ja que (B_m^j) és regular i (P_j,P_j) és no nul per a tot $j\leq n$.

En conclusió, donada la funció

$$f(x) = g(x)\ w(x) \tag{2.17}$$

sota les hipòtesis anteriors, i les relacions (2.9), el polinomi P(x), així calculat, que satisfà (2.10), és tal que, en virtud de la propietat v) de l'apartat 2.1, verifica, quan el seu grau $n\to\infty$,

$$\left\| f(x) - P(x)\ w(x) \right\| \to 0 \tag{2.18}$$

en l'espai de funcions $L^2(I)$.

D'aquesta manera, f queda expressada en funció d'una base ortogonal de funcions de quadrat integrable.

2.3 - Polinomis d'Hermite

Vegem-ne algunes propietats (Hochstadt, 1973). Tenen com a funció generatriu

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2}$$

Desenrotllant-la en sèrie de potències de t,

$$g(x,t)=e^{2xt}e^{-t^2}=\sum_{r\geq 0}\frac{(2xt)^r}{r!}\sum_{k\geq 0}\frac{(-t^2)^k}{k!}=\sum_{r,k}(-1)^k\frac{(2x)^r}{r!\,k!}t^{r+2k}$$

i si fem $r+2k=n$, tenim,

$$g(x,t)=\sum_{n\geq 0}H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.19}$$

amb

$$H_n(x)=\sum_{k\geq 0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{2.20}$$

(2.20) és la definició del polinomi d'Hermite de grau n. Aquesta familia de polinomis és ortogonal en I=R, respecte al pes e^{-x^2}. En efecte, n'hi ha prou en estudiar la integral (2.7):

$$J(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2xt-t^2}e^{2xs-s^2}e^{-x^2}dx=e^{2ts}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-t-s)^2}dx=$$

$$=\sqrt{\pi}\,e^{2ts}=\sum_{n\geq 0}\sqrt{\pi}\,\frac{2^n}{n!}(ts)^n$$

que només depèn del producte ts. En conseqüència, la familia de polinomis $\{H_n(x)\}$, $n\in N$, és ortogonal en R respecte al pes e^{-x^2}. A més a més, tenint present (2.19), apliquem (2.8) i obtenim el valor de

$$(H_n,H_m)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)\,H_m(x)\,dx=\sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{nm} \tag{2.21}$$

De (2.20) es veu que $H_n(x)$ té la paritat de n i que

$$H_{2n}(0)=(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

$$H_{2n+1}(0)=0$$

Finalment, recordem algunes altres propietats. A partir del pes, les fórmules de Rodrigues ens permeten obtenir els polinomis ortogonals per derivació successiva; en el cas d'Hermite, la fórmula de Rodrigues és

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

També es verifiquen les següents relacions de recurrència:

$$H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x)$$

$$H_{n+1}(x) - 2x\, H_n(x) + 2n\, H_{n-1}(x) = 0$$

Els primers polinomis d'Hermite són

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= -2+4x^2 \\ H_3(x) &= -12x+8x^3 \\ H_4(x) &= 2-48x^2+16x^4 \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.4 - Polinomis de Laguerre generalitzats

Aquest sistema de polinomis ortogonals presenta força interés per la generalitat que suporta. D'ell, veurem que se'n pot deduïr el sistema de polinomis d'Hermite (encara que de forma menys natural que com ho hem fet) i el de polinomis de Laguerre (Hochstadt, 1973).

Considerem la funció generatriu

$$g_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

Desenrotllem-la en sèrie entera de potències de t per a $|t|<1$. Primer, la part exponencial,

$$g_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{x^k\, t^k}{(1-t)^k} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{\alpha+k+1}}$$

I usant el desenvolupament en sèrie de potències,

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{j\geq 0} \frac{(m+j-1)!}{(m-1)!\; j!}\, t^j \tag{2.23}$$

podem escriure,

$$g_\alpha(x,t) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \sum_{j\geq 0} \frac{(\alpha+k+j)!}{(\alpha+k)!\; j!}\, t^{k+j}$$

com per a $|t|<1$ la sèrie és absolutament convergent, podem canviar d'ordre els sumatoris, i fent $k+j=n$, obtenim,

$$g_\alpha(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{L_n^\alpha(x)}{n!} t^n \tag{2.24}$$

amb

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k\leq n} (-1)^k \frac{n!\ (\alpha+k)!}{k!(n-k)!(\alpha+k)!} x^k \tag{2.25}$$

que és la definició del polinomi de Laguerre generalitzat $L_n^\alpha(x)$, de grau n.

Comprovem l'ortogonalitat d'aquests polinomis en la semirecta positiva R^+, respecte al pes $x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$. La integral (2.7) serà, en el cas present,

$$J(t,s) = \int_0^\infty \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{1}{(1-s)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xs}{1-s}} x^\alpha e^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{((1-t)(1-s))^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)x} dx$$

Escrivint-ho amb el canvi de variables

$$u = -\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)x = \frac{1-ts}{(1-t)(1-s)}\, x$$

queda,

$$J(t,s) = \frac{1}{(1-ts)^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-ts)^{\alpha+1}}$$

Finalment, si tornem a usar el desenvolupament (2.23) i ens servim de la notació,

$$\alpha ! = \Gamma(\alpha + 1) \ , \quad \alpha > -1$$

podem escriure,

$$J(t,s) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha+n)!}{n!} (ts)^n \qquad (2.26)$$

que només depèn del producte ts, i per tant, demostra l'ortogonalitat dels polinomis de Laguerre generalitzats en R^+, respecte al pes $x^\alpha e^{-x}$, amb la restricció $\alpha > -1$.

Tenint present (2.24), apliquem (2.8) i obtenim

$$(L_n, L_m) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) \, L_m^\alpha(x) \, dx = n! \, (\alpha+n)! \, \delta_{nm} \qquad (2.27)$$

o bé, tornant a utilitzar la relació $(\alpha+n)! = \Gamma(\alpha+n+1)$, que valdrà quan α no sigui enter,

$$(L_n^\alpha, L_m^\alpha) = n! \, \Gamma(\alpha+n+1)\delta_{nm} \qquad (2.28)$$

Els polinomis de Laguerre s'obtenen com un cas particular d'aquests. A (2.25), fent $\alpha=0$, obtenim (denotant $L_n^0(x)=L_n(x)$),

$$L_n(x) = \sum_{k\leq n} (-1)^k \frac{(n!)^2}{(k!)^2(n-k)!} x^k \qquad (2.29)$$

Seguidament, enunciem unes propietats:

Per derivació successiva, la fórmula de Rodrigues permet obtenir els polinomis de Laguerre generalitzats,

$$L_n^{\alpha}(x) = x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x})$$

Es verifiquen les següents relacions de recurrència:

$$L_{n+1}^{\alpha}(x)-(2n+\alpha+1-x)L_n^{\alpha}(x)+ n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0$$

$$nL_{n-1}^{\alpha}(x)+L_n^{\alpha}(x) = L_n^{\alpha}(x)$$

$$\frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) = -nL_{n-1}^{\alpha}(x)$$

Els polinomis de Laguerre generalitzats $L_n^{1/2}$, que seran utilitzats més endavant, es poden calcular a partis dels polinomis d'Hermite. Vegem aquesta relació.

Considerem el polinomi $L_n^{1/2}(x^2)$. Per (2.25), tenim

$$L_n^{1/2}(x^2) = \sum_{k\leq n} (-1)^k \frac{n!\ (n+1/2)!}{k!\,(n-k)!\,(k+1/2)!} x^{2k} \tag{2.30}$$

Posant $m!=\Gamma(m+1)$ i emprant l'equivalència

$$2^{2m-1}\ \Gamma(m)\ \Gamma(m+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\ \Gamma(2m)$$

tenim

$$n!\ (n+\frac{1}{2})! = \Gamma(n+1)\ \Gamma(n+\frac{1}{2}+1) =$$

$$= \sqrt{\pi}\ \Gamma(2n+2)\ 2^{-(2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}\ (2n+1)!}{2^{2n+1}}$$

I anàlogament,

$$k!\,(k+\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}\,(2k+1)!}{2^{2k+1}}$$

Substituint aquests resultats a (2.30), s'arriba a

$$L_n^{1/2}(x^2) = \sum_{k\leq n} (-1)^k \frac{(2n+1)!\; 2^{2k+1}}{(n-k)!\,(2k+1)!\,2^{n+1}}\, x^{2k}$$

Multiplicant ambdós membres per $2^{n+1}x$ i arreglant-ho,

$$2^{n+1} x\, L_n^{1/2}(x^2) = \sum_{k\leq n} (-1)^k \frac{(2n+1)!}{(n-k)!\,(2k+1)!} (2x)^{2k+1} \tag{2.31}$$

D'altra banda, si escrivim (2.20) pel grau 2n+1,

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j\leq n} (-1)^j \frac{(2n+1)!}{j!\,(2n+1-2j)!} (2x)^{2n+1-2j}$$

i fent n-j=k, si es té en compte que $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$,

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k\leq n} (-1)^n\, (-1)^k \frac{(2n+1)!}{(n-k)!\,(2k+1)!} (2x)^{2k+1} \tag{2.32}$$

Comparant (2.31) i (2.32), obtenim la relació buscada:

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n\, 2^{2n+1}\, x\, L_n^{1/2}(x^2) \tag{2.33}$$

Seguint uns passos semblants, arribariem també a

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \, 2^{2n} \, L_n^{-1/2}(x^2)$$

Així, els polinòmis d'Hermite són un cas particular dels polinòmis de Laguerre generalitzats.

Com en el final de l'apartat anterior, escrivim alguns d'aquests polinomis, després utilitzats.

Els primers polinòmis de Laguerre són

$$\begin{aligned} L_o(x) &= 1 \\ L_1(x) &= 1-x \\ L_2(x) &= 2-4x+x^2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Pels polinomis $L_n^{1/2}$, tenim,

$$\begin{aligned} L_o^{1/2}(x) &= 1 \\ L_1^{1/2}(x) &= \frac{3}{2}-x \\ L_2^{1/2}(x) &= \frac{15}{4}-5x+x^2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

3 - Model per a la funció de distribució a l'entorn del sol

3.1 - Contribució als moments d'ordre parell

En el primer capítol, hem comprovat que les relacions entre moments d'ordre parell es poden aconseguir mitjançant una distribució d'Schwarzschild generalitzada, de la forma (1.40). Al no donar moments d'ordre imparell, era aconsellable prendre-la com (1.42). En el present capítol ho posarem en pràctica.

Prendrem la FDD, segons (1.42), funció de $\Pi^2+\lambda Z^2$ i Θ. Així, Π_o i Z_o seran nuls i, en general, Θ_o no nul, lo qual convé.

La part de la FDD parella en $\Theta-\Theta_o$ serà quadràtica en les velocitats residuals, com (1.40). Fins fa pocs anys, aquesta part de la FDD, hauria estat suficient per a resoldre el problema: Només tindriem moments parells.

A la part parella, que donarà les característiques principals de la distribució, li superposarem una funció imparella en $\Theta-\Theta_o$, que donarà explicació de l'assimetria.

Més concretament, la forma de la FDD serà la següent: La part parella consistirà en el producte d'un polinomi per la funció d'Schwarzschild. Si tots els coeficients del polinomi tendeixen a zero, a excepció del terme independent, només restarà la FDD tradicional. La part imparella serà el producte d'una funció quadràtica en velocitats residuals per una que només dependrà de la segona component d'aquestes. En la darrera funció també hi intervindrà un polinomi. Així, els moments imparells es calcularan amb relativa facilitat.

Treballar amb polinomis simplifica els càlculs i manté més generalitat, doncs, si aquests polinomis es calculen a partir d'una base de polinomis ortogonals, cada moment de la distribució determina un coeficient en l'expressió dels polinomis en la dita base, i no altera per a res els ja calculats.

Aquest mètode és una gran aventatge sobre la utilització del mètode de coeficients indeterminats. Quan es coneguin moments d'ordre superior, només haurem d'afegir-hi nous coeficients i mantenir els ja calculats.

Per a treballar amb comoditat i poder aplicar l'aparell matemàtic desenrotllat en l'anterior capítol suposarem que la FDD és de quadrat integrable en R. Calcular la FDD a partir dels moments serà, bàsicament, aplicar l'apartat 2.2.

Sigui

$$\theta = \Theta - \Theta_0$$

la segona component de la velocitat residual. Tal com hem dit al començar el capítol, prendrem la FDD de la forma

$$\varphi\,(\Pi^2+\lambda Z^2,\theta) = \varphi_+(\Pi^2+\lambda Z^2,\theta) + \varphi_-(\Pi^2+\lambda Z^2,\theta) \qquad (3.1)$$

on φ_+ és una funció parella en θ (serà quadràtica en les velocitats residuals) i φ_- és imparella en θ.

D'aquesta forma, al avaluar els moments d'ordre parell només hi contribuirà φ_+. Als moments centrats imparells, només φ_-. A més, per la forma de (3.1), es verificarà, com havíem dit, $\Pi_0=Z_0=0$ i , generalment, $\Theta_0 \neq 0$.

Escrivim les integrals primeres, amb que comptem, de la següent forma:

$$I = I_1 - I_3 = \Pi^2 + \Theta^2 + 2\,U_1(\varpi)$$

$$J = I_2 = \varpi\Theta \qquad (3.2)$$

$$K = I_3 = Z^2 + 2\,U_2(z)$$

Treballem, sempre, sota les hipòtesis que ens permeten disposar d'elles i tenim present que no considerem la dependència en el potencial, ja que aquest el suposem funció de la posició i no de la velocitat.

Com hem vist en el cas c) de l'apartat 1.3, amb (3.1) podrem obtenir la sèrie de dotze moments d'Erickson.

Determinarem, per separat, les parts parella i imparella de la FDD.

Vegem la part parella i la contribució als moments parells. D'acord amb (1.47), sigui

$$\varphi_+ = \psi(Q) \;, \qquad Q = \frac{1}{a^2}(\Pi^2 + \eta\Theta^2 + \lambda Z^2) \tag{3.3}$$

Recordant (1.44), (1.45) i (1.46), veiem que

$$\varphi_+ = \bar{\varphi}_+(\, I + \lambda K + 2\alpha J + \beta J^2\,) \tag{3.4}$$

i

$$\eta = 1 + \beta\varpi^2$$

$$\Theta_o = -\frac{\alpha\varpi}{1 + \beta\varpi^2}$$

I segons s'ha explicat, al començar aquest tercer capítol, la forma concreta d'aquesta part de la FDD és

$$\psi(Q) = P(Q)\, e^{-\frac{1}{2}Q} \tag{3.5}$$

on P(Q) és un polinomi (que imposarem positiu per a tot $Q \geq 0$).

En realitat, segons l'apartat 2.1, $P(Q)\ e^{-Q/2}$ no és res més que l'expressió de $\psi(Q)$ en la base de funcions de quadrat integrable en la semirecta positiva R^+, prenent per pes $e^{-Q/2}$.

Com s'ha vist, en aquest cas de distribució quadràtica en velocitats residuals, es verifiquen les relacions

$$\mu_{11} = \eta\, \mu_{22} = \lambda\, \mu_{33}$$

$$\mu_{1111} = \eta^2 \mu_{2222} = \lambda^2 \mu_{3333}$$

i només haurem de preocupar-nos de normalitzar la FDD i obtenir els moments μ_{11} i μ_{1111}.

La transformada de Mellin $\Psi(p)$ de $\psi(Q)$ serà, per (1.56),

$$\Psi(p) = \int_0^\infty Q^{p-1}\ P(Q)\ e^{-\frac{1}{2}Q}\ dQ \qquad (3.6)$$

Usant (1.58), anem a escriure les expressions corresponents a (1.61) (1.62) i (1.64). Per això, comparant (3.3) amb (1.47), tenim,

$$A = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a^2}, \frac{\eta}{a^2}, \frac{\lambda}{a^2}\right)$$

i

$$|A| = \frac{\eta\lambda}{a^6}$$

Aleshores, tindrem les següents relacions,

$$N = \frac{2\pi a^3}{(\eta\lambda)^{1/2}} \Psi_0 \tag{3.7}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{3} \frac{\Psi_2}{\Psi_0} a^2 \tag{3.8}$$

$$\mu_{1111} = \frac{9}{5} \frac{\Psi_4 \Psi_0}{(\Psi_2)^2} \mu_{11}^2$$

o bé, si en aquesta expressió substituïm el valor μ_{11}^2 donat per (3.8),

$$\mu_{1111} = \frac{1}{5} \frac{\Psi_4}{\Psi_0} a^4 \tag{3.9}$$

En (3.7), (3.8) i (3.9) tot és conegut excepte Ψ_i, i=0,2,4. Si les aïllem, dónen,

$$\Psi_0 = \frac{N(\eta\lambda)^{1/2}}{2\pi a^3} \tag{3.10}$$

$$\Psi_2 = \frac{3}{a^2} \mu_{11} \Psi_0 \tag{3.11}$$

$$\Psi_4 = \frac{5}{a^4} \mu_{1111} \Psi_0 \tag{3.12}$$

Calcularem P(Q) per a que $\Psi(p)$ satisfaci (3.10), (3.11) i (3.12). Per a n=0,2,4,..., expressem (3.6) com

$$\Psi_n = \Psi\left(\frac{n+3}{2}\right) = \int_0^\infty Q^{n/2}\, P(Q)\, Q^{1/2}\, e^{-\frac{1}{2}Q}\, dQ$$

Amb el canvi de variables $T = Q/2$, tenim,

$$\Psi_n = 2^{\frac{n+3}{2}} \int_0^\infty T^{n/2}\, P(2T)\, T^{1/2} e^{-T}\, dT$$

i notant

$$R_{n/2} = 2^{-\frac{n+3}{2}} \Psi_n \tag{3.13}$$

tenim,

$$R_{n/2} = \int_0^\infty T^{n/2}\, P(2T)\, T^{1/2}\, e^{-T}\, dT$$

Amb aquestes transformacions, ens hem posat en la mateixa situació que teniem en (2.10), amb $w(T) = T^{1/2}\, e^{-T}$ i $P(2T)$ el polinomi a determinar. Com ja hem vist en l'apartat 2.4, aquest pes és l'associat als polinomis de Laguerre generalitzats $L_n^{1/2}(T)$ i , per tant, cercarem $P(2T)$ en funció d'aquests.

Segons (2.11), expressem $P(2T)$ en funció de $L_i^{1/2}(T)$:

$$P(2T) = \sum_i a_i L_i^{1/2}(T) \tag{3.14}$$

I segons (2.16), els coeficients a_i vénen donats per,

$$a_i = \frac{1}{(L_i^{1/2}, L_i^{1/2})} \sum_n B_{n/2}^{i}\, R_{n/2}\,, \qquad \frac{n}{2} \leq i \tag{3.15}$$

on els coeficients $B_{n/2}^{i}$ són, comparant (2.35) amb (2.3), els de la matriu,

$$(B^{i}_{n/2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1 & 0 \\ 15/4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Recordem que, com només calculem fins als moments de quart ordre , n prén els valors 0, 2, 4.

Les solucions a (3.15) són, tenint en compte (2.28) pels productes $(L^{1/2}_i, L^{1/2}_i)$, les següents:

Per a i=0, segons (3.13) i (3.16),

$$a_o = \frac{\Psi_0}{2^{3/2}\,\Gamma(3/2)} \tag{3.17}$$

Per a i=1, segons (3.11), (3.13) i (3.16)

$$a_1 = \frac{3\,\Psi_0}{2^{5/2}\,\Gamma(5/2)} \left(1 - \frac{\mu_{11}}{a^2} \right) \tag{3.18}$$

Per a i=2, segons (3.12), (3.13) i (3.16),

$$a_2 = \frac{5\Psi_0}{2^{9/2}\,\Gamma(7/2)} \left(\frac{\mu_{1111}}{a^4} - \frac{6\,\mu_{11}}{a^2} + 3 \right) \tag{3.19}$$

Procedint així, es poden obtenir tots els coeficients que facin falta. Veiem que a_o ens dóna la normalització de la FDD (a_o queda determinat per Ψ_o i aquest, segons (3.10), per N); a_1 col.labora en l'obtenció del moment de segon ordre; a_2 contribueix al de quart ordre, i en general, si coneguéssim més moments, el coeficient a_n contribuiria al moment d'ordre 2n.

En particular, si $a_1 = 0$, tenim $\mu_{11} = a^2$, que coincideix amb el moment de segon ordre de la distribució d'Schwarzschild (1.67). És a dir, en aquest cas, tindriem una FDD amb desviacions típiques donades pels semieixos de l'el.lipsoide de velocitats.

Comprovem, també, que si $\mu_{11} = a^2$, (3.19) es converteix en

$$a_2 = \frac{5\,\Psi_0}{2^{9/2}\,\Gamma(7/2)}\left(\frac{\mu_{1111}}{a^4} - 3\right)$$

Si la distribució és d'Schwarzschild, per (1.69), es verificarà $\mu_{1111} = 3a^4$, lo qual dóna, com era d'esperar, el valor $a_2 = 0$.

Si només arribem fins als moments de quart ordre, pel que fa a la part parella d'aquesta FDD es pot afirmar que, en cas de satisfer-se la relació

$$\frac{\mu_{1111}}{\mu_{11}^2} > 3$$

el polinomi P(Q), que apareix a (3.5), és de grau superior a un en Q. (Aquesta és la situació en que ens trobem al donar els valors d'Erick son als moments centrats). En efecte, fent, en (3.19), $a_2 = 0$ (que correspondria al cas en que P(Q) fos de primer grau), tenim una expressió equivalent a

$$3\,a^4 - 6\mu_{11}\,a^2 + \mu_{1111} = 0$$

Només obtindrem solució per a "a" si el discriminant d'aquesta equació de segon grau és no negatiu, és a dir, si $36\mu_{11}^2 - 12\mu_{1111} \geqslant 0$. Això equival a

$$\frac{\mu_{1111}}{\mu_{11}^2} \leqslant 3$$

Acabem, doncs, de veure que, en cas de donar-se aquesta darrera relació, és possible l'anul.lació d' a_2 i, per tant, que P(Q) sigui de primer grau. En aquest cas, el valor d'a, que fins ara quedava lliure, estaria absolutament determinat per la relació entre els dos moments parells anteriors. Tanmateix, no és aquest el cas.

3.2 - Contribució als moments d'ordre imparell

Considerem la part imparella de la FDD de la forma (1.42),

$$\varphi_- = \varphi_-(\pi^2 + \lambda z^2 , \theta)$$

Recordem que els moments que φ_- ha d'explicar són $\mu_{010} = 0$, μ_{210}, μ_{030}, μ_{012}. I en aquest cas, es satisfarà, com sabem,

$$\mu_{2r0} = \lambda \mu_{0r2} \tag{3.20}$$

Observem, en primer lloc, que φ_- no pot ser separable. Òbviament, si

$$\varphi_- = \varphi_1^+(\pi^2 + \lambda z^2) + \varphi_2^-(\theta)$$

amb $\varphi_2^-(\theta)$, una funció imparella en θ, al calcular el moment μ_{210}, per exemple, obtindriem una integral divergent.

Si φ_- fos de la forma

$$\varphi_- = \varphi_1^+(\pi^2 + \lambda z^2)\,\varphi_2^-(\theta)$$

algún dels tres moments de tercer ordre seria nul. En efecte, sabem, per pròpia definició de moments centrats, que,

$$0 = \mu_{010} = \frac{1}{N}\int_{\underline{u}} \theta\,\varphi_-\,d\underline{u} = \frac{1}{N}\iint_{\pi,z} \varphi_1^+\,d\pi\,dz \int_\theta \theta\,\varphi_2^-(\theta)\,d\theta$$

Per a que es compleixi aquesta igualtat, podem distingir dos casos:
Primer, que fos

$$\iint_{\pi,z} \varphi_1^+\,d\pi\,dz = 0$$

En aquesta situació, per la separabilitat de variables, tindriem, també, $\mu_{030} = 0$.

Segon, que fos

$$\int_\theta \theta\,\varphi_2^-(\theta)\,d\theta = 0$$

Aquí, per igual raó que abans, tindriem $\mu_{210} = 0$.

Ambdues possibilitats són inacceptables, amb lo qual queda provat que φ_- és no separable.

La funció, que permet explicar els moments imparells de forma relativament senzilla, és la següent:

Sigui

$$\varphi_- = \varphi_1(\pi^2+k\theta^2+\lambda Z^2)\,\varphi_2^-(\theta) \qquad (3.21)$$

$\varphi_2^-(\theta)$ és una funció imparella en θ i suposem que φ_1 i φ_2^- fan convergents totes les integrals que apareixeran.

Considerem les integrals de la forma

$$G(p,q) = \frac{1}{N}\iiint (\pi^2+k\theta^2+\lambda Z^2)^p\ \theta^q\ \varphi_-\ d\pi\, d\theta\, dZ \qquad (3.22)$$

amb $p=0,1,2,\ldots$ i $q=1,3,\ldots$

Fem el canvi de variables

$$\pi = (s-kt^2)^{1/2}\cos\gamma$$

$$\theta = t \qquad\qquad \left|\frac{\partial(\pi,\theta,Z)}{\partial(s,t,\gamma)}\right| = \frac{\lambda^{-1/2}}{2}$$

$$Z = \lambda^{-1/2}(s-kt^2)^{1/2}\sin\gamma$$

Així,

$$s = \pi^2 + k\,\theta^2 + \lambda Z^2$$

i podem distingir dos casos:

i) $s \in [0,\infty]$, si $k \geq 0$.

ii) $s \in [-\infty,\infty]$, si $k < 0$.

Ara, havent integrat ja segons γ, (3.22) es convertirà en

$$G(p,q) = \frac{\pi\lambda^{-1/2}}{N} \int_S s^p \varphi_1(s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} t^q \varphi_2^-(t)\, dt \tag{3.23}$$

La primera integral de (3.23) la representarem per

$$F(p) = \int_S s^p \varphi_1(s)\, ds \tag{3.24}$$

posant atenció en l'interval de definició, que varia segons ens trobem en el cas i) o ii).

Quant a la segona integral de (3.23), veiem que es redueix a la transformada de Mellin de la funció $\varphi_2^-(t)$. En efecte, recordant que l'exponent q és imparell i que $\varphi_2^-(t)$ és funció imparella de t, aquella integral s'escriurà,

$$\Phi(q) = 2\int_0^{\infty} t^q \varphi_2^-(t)\, dt \tag{3.25}$$

Amb aquestes notacions, (3.23) serà,

$$G(p,q) = \frac{\pi\lambda^{-1/2}}{N} F(p)\, \Phi(q) \tag{3.26}$$

Vegem que $G(p,q)$ ens dóna, fàcilment, els moments imparells i les relacions entre ells.

En primer lloc, segons la definició de $G(p,q)$, (3.22), veiem que

$$G(0,q) = \mu_{oqo}$$

o bé, utilitzant (3.26),

$$\mu_{oqo} = \frac{\pi \lambda^{-1/2}}{N} F(0)\ \Phi(q) \tag{3.27}$$

Suposarem $F(0) \neq 0$.

D'altra banda, també de (3.22) es desprén

$$G(1,q) = \mu_{2q0} + k\,\mu_{0(q+2)0} + \lambda\mu_{0q2}$$

Si apliquem (3.20),

$$G(1,q) = 2\,\mu_{2q0} + k\ \mu_{0(q+2)0}$$

I aïllant μ_{2q0} d'aquesta expressió i utilitzant (3.26) i (3.27), tenim,

$$\mu_{2q0} = \frac{1}{2}\left(\frac{F(1)}{F(0)}\,\mu_{0q0} - k\,\mu_{0(q+2)0} \right) \tag{3.28}$$

En particular, per a q=1, (3.28) es converteix en

$$\mu_{210} = -\frac{k}{2}\,\mu_{030} \tag{3.29}$$

Per a que (3.29) satisfaci els valors que dóna Erickson, k ha de valer, aproximadament, -2, doncs μ_{210} i μ_{030} són pràcticament iguals. Com k és negatiu, haurem de considerar el cas ii) .

La relació donada per (3.28) pot valer per a moments de cinquè ordre o superiors; però, fins que no es coneguin amb més exactitud no podrem aplicar-la.

Igualment, de (3.22), per a p més gran que un, se'n dedueixen expressions en funció de combinacions lineals de moments d'ordre superior a quatre. Aplicant convenientment (1.38) i (1.39), doncs la forma de φ_- ho permet, obtindriem relacions de l'estil (3.28) per a altres moments d'ordre superior.

Com es veu, la part imparella de la FDD presa com (3.21), ens explica, a partir de relacions senzilles, les possibles relacions entre moments imparells. Escrivim-la en funció de les integrals primeres.

Sigui S la forma quadràtica, no necessariament definida positiva,

$$S = \frac{1}{c^2}\left(\Pi^2 + k\,\theta^2 + \lambda Z^2\right) \tag{3.30}$$

Llavors, escrivim (3.21) com

$$\varphi_- = \varphi_1^*(S)\,\varphi_2^-(\theta) \tag{3.31}$$

I tot seguit, usant les integrals primeres (3.2), veurem que (3.31) és equivalent a una funció de la forma

$$\varphi_- = \overline{\varphi}_1(I + \lambda K + 2\alpha' J + \beta' J^2)\,\overline{\varphi}_2^-(J) \tag{3.32}$$

amb

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{k}{\eta}\,\alpha \\ \beta' &= \frac{k-1}{\eta-1}\,\beta \end{aligned} \tag{3.33}$$

mantenint-se els valors de η i Θ_o donats per (1.45) i (1.46).
En efecte,

$$I+\lambda K+2\frac{k}{\eta}\alpha J+\frac{k-1}{\eta-1}\beta J^2 = \Pi^2+\Theta^2+2U_1+\lambda Z^2+2\lambda U_2+2\frac{k}{\eta}\alpha\varpi\Theta+\frac{k-1}{\eta-1}\beta\varpi^2\Theta^2 =$$

$$= \Pi^2+\left(1+\frac{k-1}{\eta-1}\beta\varpi^2\right)(\Theta+C)^2+\lambda Z^2+\text{const.}$$

on

$$C = \frac{\frac{k}{\eta}\alpha\varpi}{1+\frac{k-1}{\eta-1}\beta\varpi^2}$$

Utilitzant (1.45) i (1.46), tenim

$$1+\frac{k-1}{\eta-1}\beta\varpi^2 = k \qquad \text{i} \qquad C = -\Theta_o$$

En conseqüència, considerant, només, la dependència en les velocitats,

$$I+\lambda K+2\alpha' J+\beta' J^2 = \Pi^2+k\theta^2+\lambda Z^2$$

Donguem, ja, forma concreta a φ_-.
Sigui

$$\varphi_1^*(S) = e^{-|S|^r} \quad , \qquad r>0 \tag{3.34}$$

El motiu de prendre φ_1^* d'aquesta forma és tan sols per a garantir la convergència de les integrals. Fixem-nos en que, a nosaltres, φ_1^* només ens serveix per a calcular F(0) , a partir de (3.24), que intervé a (3.27). Seria diferent si uséssim (3.26) per a valors de p superiors a un, o (3.28) amb q també més gran que un.

Per altra part, sigui

$$\varphi_2^-(\theta) = W(\theta)\, e^{-\delta \frac{\theta^2}{a^2}} \tag{3.35}$$

on $W(\theta)$ és un polinòmi que només conté termes imparells de θ. Amb (3.35), veurem que φ_2^- queda expressada en funció de la base ortogonal de funcions de quadrat integrable en R, esmentada en l'apartat 2.1 .

Ens cal determinar F(0) i $\Phi(q)$ per a aplicar (3.27). Calculem F(0) segons (3.24). Tenint present (3.34),

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} (c^2 S)^p\, \varphi_1(c^2 S)\, d(c^2 S) =$$

$$= 2\, c^{2(p+1)} \int_0^{\infty} S^p\, e^{-|S|^r}\, dS$$

Usant que la funció Gamma verifica (com es pot deduïr de (1.66) amb un simple canvi de variables),

$$\int_0^{\infty} S^p\, e^{-|S|^r}\, dS = \frac{1}{r}\, \Gamma\!\left(\frac{p+1}{r}\right)$$

tenim,

$$F(p) = \frac{2\, c^{2(p+1)}}{r}\, \Gamma\!\left(\frac{p+1}{r}\right) \tag{3.36}$$

i en particular,

$$F(0) = \frac{2c^2}{r}\, \Gamma\!\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3.37}$$

Calculem $\Phi(q)$. Segons (3.25) i tenint present (3.35), escriurem

$$\Phi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^q \, W(\theta) \, e^{-\delta \frac{\theta^2}{a^2}} \, d\theta$$

per a q imparell. Fent el canvi

$$\delta \frac{\theta^2}{a^2} = y^2$$

tenim que

$$\Phi(q) = \left(\frac{a}{\delta^{1/2}}\right)^{q+1} \int_{-\infty}^{\infty} y^q \, W\left(\frac{a}{\delta^{1/2}} y\right) e^{-y^2} \, dy$$

Aleshores, emprant (3.27),

$$\frac{N \mu_{oqo}}{\pi \lambda^{-1/2} F(0)} = \left(\frac{a}{\delta^{1/2}}\right)^{q+1} \int_{-\infty}^{\infty} y^q \, W\left(\frac{a}{\delta^{1/2}} y\right) e^{-y^2} \, dy$$

o bé, notant,

$$R_q = \frac{N \mu_{oqo}}{\pi \lambda^{-1/2} F(0)} \left(\frac{\delta^{1/2}}{a}\right)^{q+1} \qquad (3.38)$$

podem escriure el sistema

$$R_q = \int_{-\infty}^{\infty} y^q \, W\left(\frac{a}{\delta^{1/2}} y\right) e^{-y^2} \, dy \,, \qquad q=1, 3, \ldots \qquad (3.39)$$

D'aquesta forma, tornem a estar en la situació de (2.10) amb el polinomi $W(\frac{a}{\delta^{1/2}}y)$ a determinar i $w(y)=e^{-y^2}$. Com sabem per l'apartat 2.3, aquest és el pes corresponent als polinomis d'Hermite.

Com q recorre els imparells, per aplicar el mètode exposat en 2.2, cal considerar que q pren qualsevol valor natural, però que per a q=0,2,... es compleix $R_q=0$.

Llavors, segons (2.11) fem

$$W\left(\frac{a}{\delta^{1/2}}\,y\right) = \sum_i b_i\, H_i(y) \tag{3.40}$$

Per (2.16), els coeficients b_i seran

$$b_i = \frac{1}{(H_i, H_i)} \sum_{q\leq i} B_q^i\, R_q \tag{3.41}$$

on els B_q^i són, comparant (2.22) amb (2.3), els de la matriu

$$(B_q^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

Unicament considerem moments imparells fins a tercer ordre.

Les solucions a (3.41) són, recordant (2.21), les següents:

Per a $i = 0,2,4,\ldots$, $b_i = 0$, ja que tots els termes del sumatori s'anul.len.

Per a $i = 1$, com R_1 és proporcional a μ_{010}, i aquest és nul per definició, tenim, també $b_1 = 0$.

Per a $i = 3$, segons (3.38) i (3.42),

$$b_3 = \frac{N\,\delta^2\,\mu_{030}}{6\pi^{3/2}\lambda^{-1/2}a^4 F(0)} \tag{3.43}$$

Llavors, usant (3.10), per a tenir-ho expressat en funció de Ψ_o, com en la part parella, i (2.17), podem escriure W en funció de θ :

$$W(\theta) = \frac{\Psi_o \; \mu_{030} \, \delta^2}{6\pi^{1/2} \eta^{1/2} a c^2 \frac{1}{r} \Gamma(\frac{1}{r})} \; H_3(\frac{\delta^{1/2}}{a}\theta) \qquad (3.44)$$

3.3 - Funció de distribució completa

Escrivim juntes les parts parella i imparella de la FDD.

$$\varphi = P(Q)\, e^{-\frac{1}{2}Q} + W(\theta)\, e^{-\delta\frac{\theta^2}{a^2}}\, e^{-|S|^r} \qquad (3.45)$$

Recordem que, expressant-ho en funció de les integrals primeres de les equacions del moviment, d'acord amb (3.4) i (3.32), tenim,

$$\varphi(I+\lambda K, J) = \bar{\varphi}_+(I+\lambda K+2\alpha J+\beta J^2) + \bar{\varphi}_1(I+\lambda K+2\alpha' J+\beta' J^2)\bar{\varphi}_2^-(J)$$

Aquest tipus de FDD és suficient per a explicar la sèrie de dotze moments, que ens haviem proposat. Ara, sols queda comprovar que aquesta FDD està ben definida, és a dir, que sigui sempre positiva (les altres condicions ja les satisfà).

Com P(Q) el prenem positiu per a tot $Q \geq 0$, haurà de complir-se,

$$P(Q)\, e^{-\frac{1}{2}Q} > |W(\theta)|\, e^{-\delta\frac{\theta^2}{a^2}} \; e^{-|S|^r} \qquad (3.46)$$

doncs recordem que $W(\vartheta)$ és un polinomi imparell en ϑ.

Relacionem S amb Q. De (3.3) i (3.30) veiem que,

$$S = \frac{a^2}{c^2}(Q-\sigma\vartheta^2)$$

amb

$$\sigma = \frac{\eta - k}{a^2}$$

El polinomi $\frac{1}{\Psi_o} P(Q)$, adimensional, està acotat inferiorment.

Sigui $\mathfrak{m}$ aquesta cota. Llavors, dividint (3.45) entre Ψ_o i utilitzant (3.44), per a que es compleixi (3.46) serà suficient que es verifi - qui

$$\mathfrak{m}\, e^{-\frac{1}{2}Q} > \left| \frac{\mu_{030}\, \delta^2 H_3\left(\frac{\delta^{1/2}}{a}\vartheta\right)}{6\pi^{1/2}\eta^{1/2} ac^2 \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \right| e^{-\delta\frac{\vartheta^2}{a^2}}\, e^{-\left|\frac{a^2}{c^2}(Q-\sigma\vartheta^2)\right|^r}$$

Revisem els paràmetres que queden per a determinar. Primerament, vegem que δ no pot ser qualsevol: Quan es dongui la igualtat $Q=\sigma\vartheta^2$, la desigualtat anterior es converteix en

$$\mathfrak{m}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma\vartheta^2} > \left| \frac{\mu_{030}\, \delta^2 H_3\left(\frac{\delta^{1/2}}{a}\vartheta\right)}{6\pi^{1/2}\eta^{1/2} ac^2 \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \right| e^{-\delta\frac{\vartheta^2}{a^2}} \qquad (3.47)$$

Multiplicant (3.47) per $e^{\frac{1}{2}\sigma\vartheta^2}$ i definint un nou paràmetre τ, tal que compleixi

$$\frac{\tau}{a^2} = \frac{\delta}{a^2} - \frac{\sigma}{2}$$

tenim,

$$\mathfrak{M} > \left| \frac{\mu_{030}\, \delta^2\, H_3(\frac{\delta^{1/2}}{a}\theta)}{6\pi^{1/2}\eta^{1/2} ac^2 \frac{1}{r}\Gamma(\frac{1}{r})} \right| e^{-\frac{\tau}{a^2}\theta^2}$$

Veiem, doncs, que això només serà possible si el membre de la dreta no divergeix, és a dir, si τ és positiu, amb lo qual es verifica

$$\delta > \frac{1}{2}\sigma a^2 = \frac{\eta - k}{2}$$

Aleshores, $\left| \delta^2\, H_3(\frac{\delta^{1/2}}{a}\theta) \right| e^{-\tau\frac{\theta^2}{a^2}}$ serà un valor acotat per a tot θ, la qual cota designarem per $\overline{\mathfrak{M}}$ i tindrem present que dependrà de τ i d'a. Així, fent créixer c el que faci falta, podrem assolir la darrera desigualtat sense dificultat. Ha de satisfer-se:

$$c^2 > \left| \frac{\mu_{030}}{6\pi^{1/2}\eta^{1/2} a \frac{1}{r}\Gamma(\frac{1}{r})} \right| \frac{\overline{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{M}} \equiv \frac{1}{a}\,\mathfrak{M} \qquad (3.48)$$

En el cas $Q \neq \sigma\theta^2$, aprofitant la discusió anterior, serà suficient veure,

$$e^{-\frac{1}{2}(Q-\sigma\theta^2)} > \frac{1}{ac^2}\,\mathfrak{M}\; e^{-\left|\frac{a^2}{c^2}(Q-\sigma\theta^2)\right|^r}$$

Fem les següents transformacions:

$$\chi = 2\,\frac{a^2}{c^2}$$

i

$$\xi = \frac{Q-\sigma\vartheta^2}{2}$$

amb lo qual, haurem de comprovar,

$$1 > \frac{\chi\,\mathfrak{M}}{2a^3}\; e^{-(|\chi\xi|^r - \xi)} \tag{3.49}$$

Cal fer, però, tres observacions:

Primera, la desigualtat (3.49) n'hi ha prou amb que sigui satisfeta per a $\xi \geq 0$.

Segona, és necessari que r sigui superior o igual a la unitat.

Tercera, per a $r \geq 1$, el valor de $\frac{1}{r}\Gamma(\frac{1}{r})$, que intervé dins $\mathfrak{M}$, es manté, sempre, positiu i acotat, molt pròxim a 1. Efectivament, fent $x=1/r$ ($1\leq r\leq\infty$, $1\leq x\leq 0$), $\frac{1}{r}\,\Gamma(\frac{1}{r}) = x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, valor que varia entre $\Gamma(1)$ i $\Gamma(2)$ i és pròxim a 1.

En conclusió, haurà de complir-se

$$1 > \frac{\chi\,\mathfrak{M}}{2a^3}\; \max_{\xi\geq 0}\; e^{-(\chi^r\xi^r - \xi)} \tag{3.50}$$

Calculant el màxim, obtenim, per a (3.50),

$$1 > \frac{\chi\,\mathfrak{M}}{2a^3}\; e^{(r-1)(r\chi)^{\frac{r}{1-r}}} \tag{3.51}$$

Desigualtat que és fàcil d'aconseguir, doncs, fent, per exemple,

$$c^2 = \frac{e^r}{a} \mathfrak{M}$$

que evidentment satisfà (3.48). Per tant,

$$e^{-r} = \frac{\chi \mathfrak{M}}{2a^3}$$

que substituïnt-ho a (3.51) resulta

$$1 > e^{-r} e^{(r-1)} (r\chi)^{\frac{r}{1-r}}$$

I aquesta desigualtat es compleix sempre, doncs:

si $\chi > 1$, fent $r \to 1$, obtenim $1 > e^{-r}$;

si $\chi = 1$, prenent $r=2$, obtenim $1 > e^{-6}$;

si $\chi < 1$, prenent $r = 1/\chi$, obtenim $1 > e^{-1}$.

En conclusió, en l'apartat 3.1 hem obtingut la part parella de la FDD, que és la que dóna contribució als moments d'ordre parell i que l'hem presa quadràtica en velocitats residuals, de la següent forma:

$$\varphi_+ = \psi(Q) = \sum_i a_i \, L_i^{1/2}(Q/2) \, e^{-\frac{1}{2}Q} , \qquad i=0,1,2$$

amb a_i segons (3.17), (3.18) i (3.19), i Q donat per (3.3).

En l'apartat 3.2, hem vist com podria ser la part imparella de la FDD, proposant la següent:

$$\varphi_- = b_3\, H_3\!\left(\frac{\delta^{1/2}}{a}\vartheta\right) e^{-\delta\frac{\vartheta^2}{a^2}}\, e^{-|S|^r}$$

amb $S=\frac{a^2}{c^2}(Q-\sigma\vartheta^2)$ i b_3 donat per (3.43).

Finalment, hem vist que la part imparella es mantenia, en valor absolut, inferior a la part parella, la qual era positiva . Això era possible amb δ,r i S adequats i assegurava el caràcter dominant de la part parella de la FDD. La FDD és positiva a tot l'espai.

3.4 - Un mètode general per a obtenir la funció de distribució

En l'apartat anterior, construïem una FDD per a explicar la distribució de les velocitats a l'entorn del sol. La idea havia estat pertorbar una distribució d'Schwarzschild generalitzada, mitjançant una nova funció, que li superposavem.

En el present apartat, veurem com obtenir una FDD, globalment, és a dir, sense haver de recórrer a la superposició de dues funcions bàsicament diferents.

D'entrada, podriem fer ús de la funció característica associada a la distribució de velocitats. Recordem-ne algunes propietats (Rényi, 1976). Després veurem que no la podem fer servir.

Donada una FDD f($\underline{u}$), que suposarem normalitzada, es defineix la seva funció característica associada $\phi(\underline{s})$, com la seva transformada de Fourier,

$$\phi(\underline{s}) = \int_{\underline{u}} e^{i\,\underline{s}\cdot\underline{u}}\, f(\underline{u})d\underline{u}\ ; \qquad \underline{u},\underline{s}\in R^3 \qquad (3.52)$$

Treballarem en dimensió tres, però val per a qualsevol dimensió finita. La integral (3.52) sempre existeix, ja que $f(\underline{u})$ és integrable a R^3 i $\left|e^{i\,\underline{s}.\underline{u}}\right| = 1$. La funció característica $\phi(\underline{s})$ és uniformement contínua a tot l'espai.

Si les integrals

$$C_{pqr}(\underline{s}) = \int_{\underline{u}} u_1^p u_2^q u_3^r \, e^{i\,\underline{s}.\underline{u}} f(\underline{u})d\underline{u} \; ; \qquad p,q,r \geq 0$$

existeixen i $\phi(\underline{s})$ té derivades continues, podem obtenir els moments de la distribució (treballant amb variables centrades) com

$$\mu_{pqr} = C_{pqr}(0)$$

i aleshores, es verifica,

$$D_1^p D_2^q D_3^r \, \phi(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{o}} = i^{p+q+r} \; C_{pqr}(\underline{s})\Big|_{\underline{s}=\underline{o}} = i^{p+q+r} \; \mu_{pqr}$$

(D_j^i significa derivar i-vegades respecte a la variable s_j).

Aleshores, si tots els moments són finits, la funció característica admet el següent desenvolupament en sèrie de McLaurin a l'entorn de l'origen,

$$\phi(\underline{s}) = \sum_{p+q+r=n} \frac{\mu_{pqr}}{n!} (is_1)^p (is_2)^q (is_3)^r \qquad (3.53)$$

Aquest desenvolupament no es pot estendre sempre a tot R^3. És possible si la sèrie (Kendall-Stuart, 1977, p.114)

$$\sum_{j\geq 0} \frac{1}{(\nu_{2j})^{1/2j}}$$

amb

$$\nu_m = \sum_{i+j+k=m} \mu_{ijk}$$

és divergent, lo qual passa, en particular, si a partir d'un cert ordre, els moments són nuls.

A partir de $\phi(\underline{s})$ podem obtenir $f(\underline{u})$ mitjançant la transformada inversa de Fourier:

Si $\phi(\underline{s})$ és integrable a tot R^3,

$$f(\underline{u}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\underline{s}} e^{-i\,\underline{s}\cdot\underline{u}}\, \phi(\underline{s})d\underline{s} \qquad (3.54)$$

determina de manera única la FDD.

Sembla, doncs, que a partir dels moments, podriem construir, per (3.53), la funció característica, i després, amb (3.54), obtenir la FDD. Però, malhauradament, (3.54) no és sempre convergent. Així, per exemple, si tenim un nombre finit de moments, com en el nostre cas, el desenvolupament (3.53) de $\phi(\underline{s})$ és un polinomi en s_1, s_2 i s_3, i per tant, $\phi(\underline{s})$ no és integrable a R^3: (3.54) no existeix.

En conseqüència, a partir dels moments coneguts, no podem obtenir la FDD usant la funció característica.

Davant d'aquesta impossibilitat, adoptarem el mètode d'aproximació en norma quadràtica a la FDD, explicat en el segon capítol i utilitzat en els anteriors apartats del capítol present.

Tot el que allà valia per a una dimensió, es generalitza, de manera natural, a qualsevol dimensió finita. Calcularem la FDD a partir d'alguna base de l'espai de funcions de quadrat integrable. Per a això, fem un parell d'observacions (pel cas tridimensional, que és el que usarem).

Donada una funció pes

$$w(\underline{x}) = w_1(x_1)w_2(x_2)w_3(x_3)$$

definida en un interval $I_1 \times I_2 \times I_3$ de R^3, el sistema de polinomis ortogonals associat és el format per productes de la forma

$$P_{ijk}(\underline{x}) = P_i^1(x_1)\ P_j^2(x_2)\ P_k^3(x_3)\ ; \qquad i,j,k\geq 0$$

on $P_n^m(x_m)$ és un polinomi de grau n de la família de polinomis ortogonals en la variable x_m respecte al pes $w_m(x_m)$, en l'interval $I_m \subseteq R$; m=1,2,3.

La demostració d'aquesta afirmació és senzilla. Calculem el producte escalar

$$(P_{ijk}, P_{i'j'k'}) =$$

$$= \iiint P_i^1(x_1)P_j^2(x_2)P_k^3(x_3)P_{i'}^1(x_1)P_{j'}^2(x_2)P_{k'}^3(x_3)w_1(x_1)w_2(x_2)w_3(x_3)dx_1dx_2dx_3$$

Per la separabilitat de $w(\underline{x})$, tenim,

$$(P_{ijk}, P_{i'j'k'}) = (P^1_i, P^1_{i'})(P^2_j, P^2_{j'})(P^3_k, P^3_{k'}) \qquad (3.55)$$

S'entén que els productes escalars del membre de la dreta es refereixen, tan sols, a la variable que els hi pertoca.

Llavors, és òbvi que $(P_{ijk}, P_{i'j'k'})$ és diferent de zero, només, quan $i=i'$, $j=j'$, $k=k'$, per l'ortogonalitat dels P^m_n .

La unicitat del sistema ortogonal $\{P_{ijk}\}$, $i,j,k \geq 0$, vé garantida, com en una dimensió, pel mètode de Gram-Schmidt de construcció del dit sistema.

Finalment, com en el cas de dimensió un, si tenim un conjunt de relacions donades per les integrals (en suposem la convergència)

$$R_{m_1 m_2 m_3} = \iiint_{I_1 \times I_2 \times I_3} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} f(\underline{x}) d\underline{x} \qquad (3.56)$$

amb $m_1, m_2, m_3 \geq 0$ i $f(\underline{x}) = g(\underline{x}) w(\underline{x})$, amb $w(\underline{x}) = w_1(x_1) w_2(x_2) w_3(x_3)$ complint les propietats de funció pes en $I_1 \times I_2 \times I_3$, llavors podem expressar $g(\underline{x})$ en funció dels polinomis ortogonals $P_{ijk}(\underline{x})$ respecte al pes i interval anteriors, de forma que aquesta combinació lineal de polinomis sigui la "millor aproximació" de $g(\underline{x})$.

Com en el cas unidimensional, tindrem $f(\underline{x})$ expressada en funció de la base de funcions de quadrat integrable en $I_1 \times I_2 \times I_3$, constituïda per

$$\{P_{ijk}(\underline{x}) \; w(\underline{x})\} \; ; \qquad i,j,k \geq 0$$

La forma de calcular aquesta aproximació és la mateixa que en el cas unidimensional i les relacions i conclusions obtingudes en aquell cas són igualment vàlides ara, només que canviant els índexs per multi-índexs ($i \to i_1 i_2 i_3$) i usant la notació $x^i \equiv x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$.

Vegem algunes aplicacions:

a) Calculem la FDD prenent com a funció pes

$$w(\Pi-\Pi_o, \Theta-\Theta_o, Z-Z_o) = e^{-\frac{(\Pi-\Pi_o)^2+(\Theta-\Theta_o)^2+(Z-Z_o)^2}{a^2}}$$

pes que és, evidentment, separable i que correspon a producte de pesos associats als polinomis d'Hermite (apartat 2.3).

Considerem la FDD de la forma

$$f(\Pi,\Theta,Z) = P(\Pi-\Pi_o, \Theta-\Theta_o, Z-Z_o)\; w(\Pi-\Pi_o, \Theta-\Theta_o, Z-Z_o) \qquad (3.57)$$

on P representa un polinomi, que calcularem en funció dels polinomis d'Hermite, de la forma,

$$P(\Pi-\Pi_o, \Theta-\Theta_o, Z-Z_o) = \sum_{i_1,i_2,i_3} c_{i_1i_2i_3}\, H_{i_1}\left(\frac{\Pi-\Pi_o}{a}\right) H_{i_2}\left(\frac{\Theta-\Theta_o}{a}\right) H_{i_3}\left(\frac{Z-Z_o}{a}\right) \qquad (3.58)$$

Les relacions a determinar seran els moments centrats

$$\mu_{pqr} = \frac{1}{N}\iiint (\Pi-\Pi_o)^p(\Theta-\Theta_o)^q(Z-Z_o)^r f(\Pi,\Theta,Z)\,d\Pi\, d\Theta\, dZ$$

que fent el canvi de variables $\Pi-\Pi_o=ax$, $\Theta-\Theta_o=ay$, $Z-Z_o=az$ i usant

(3.57) podem transformar en unes relacions equivalents,

$$\frac{N\,\mu_{pqr}}{a^{p+q+r+3}} = \iiint x^p y^q z^r \; P(ax,ay,az)\; w(ax,ay,az)\; dxdydz$$

Si escrivim

$$R_{pqr} = \frac{N\,\mu_{pqr}}{a^{p+q+r+3}} \tag{3.59}$$

obtenim una expressió a l'estil de (3.56).

Llavors, a R^3 tenim el sistema de polinomis ortogonals format pels

$$P_{i_1 i_2 i_3}(x,y,z) = H_{i_1}(x) H_{i_2}(y) H_{i_3}(z)$$

Els coeficients $c_{i_1 i_2 i_3}$ de (3.58) vindran donats per l'expressió (2.16) corresponent al cas tridimensional,

$$c_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{(P_{i_1 i_2 i_3}, P_{i_1 i_2 i_3})} \sum_{j_1, j_2, j_3} B^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} R_{j_1 j_2 j_3} \tag{3.60}$$

amb $j_k \leq i_k$, $k=1,2,3$ i $R_{j_1 j_2 j_3}$ segons (3.59). Els coeficients $B^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3}$ són els de la matriu que expressa els productes $H_{i_1}(x) H_{i_2}(y) H_{i_3}(z)$ en funció dels $x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^{j_3}$, calculables a partir de (2.22).

Així, substituint aquests coeficients a (3.58) tindrem calculat el polinomi P i, per tant, la FDD de (3.57).

En particular, a nosaltres ens interessarà el cas en que es verifiqui $\Pi_o = Z_o = 0$. Imposant que la FDD sigui parella en Π i Z hem vist que es podia aconseguir el que voliem, i explicar la sèrie de dotze moments d'Erickson(1975). Per tant, podrem comptar amb una FDD com (3.57), però amb Π_o i Z_o nuls i

$$P(\Pi-\Pi_o,\ \Theta-\Theta_o,\ Z-Z_o) = \bar{P}(\Pi^2,\ \Theta-\Theta_o,\ Z^2)$$

A més, donada la paritat de P en Π i Z, i recordant que els polinomis d'Hermite conserven la paritat de l'índex, el sumatori de (3.58) caldrà recórre'l per a i_1 i i_3 parells. Pel mateix motiu, R_{pqr} donat per (3.59), serà diferent de zero només quan p i r siguin parells. Així, usant la igualtat $\theta = \Theta - \Theta_o$, la FDD podrà ser escrita com,

$$f = \varphi(\Pi^2, \theta, Z^2) = \bar{P}(\Pi^2, \theta, Z^2)\ e^{-\frac{\Pi^2+\theta^2+Z^2}{a^2}} \tag{3.61}$$

que, fent ús de les integrals primeres, queda

$$f = \bar{\varphi}(I,J,K) = \hat{P}(I,J,K)\ e^{-\frac{1}{a^2}(I+K+\alpha J)} \tag{3.62}$$

amb $\alpha = -2\,\frac{\Theta_o}{\varpi}$.

Una FDD a l'estil de (3.61), o la més general, (3.57), té l'inconvenient, en front a l'obtinguda a 3.3, de no poder relacionar a priori els moments. Per tant, ens veiem obligats a calcular tretze coeficients del polinomi, a partir de (3.60) (un per a cada moment i un altre per a la normalització).

Unaforma d'evitar, en part, aquest inconvenient, és postular, d'entrada, una FDD de la forma següent:

b) Considerem, altra vegada, el cas en que la FDD és parella en π i Z, i per tant, $\pi_o = Z_o = 0$.

Prenguem el pes de la forma

$$w(\pi,\theta,Z) = e^{-\frac{\pi^2+\gamma\theta^2+\lambda Z^2}{a^2}}$$

i considerem la FDD

$$f = \varphi(\pi^2+\lambda Z^2, \theta) = P(\pi^2+\lambda Z^2,\theta)\; w(\pi,\theta,Z) \qquad (3.63)$$

Aquesta forma de FDD ja ens resulta familiar, doncs és de l'estil (1.42) que apareixia en el cas c) de l'apartat 1.3. Així, algunes de les relacions entre els moments ja ens vindran fixades.

Els moments a calcular seran

$$\mu_{pqr} = \frac{1}{N}\iiint \pi^p \theta^q Z^r \;\varphi(\pi^2+\lambda Z^2, \theta)\; d\pi d\theta dZ \qquad (3.64)$$

amb p i r parells.

La forma de (3.64) es correspon completament amb la que teniem a (1.28). Amb el canvi de variables, que allà feiem, aplicat al cas present, podrem rescriure (3.64).

En efecte,

$$\Pi = \rho \cos \gamma$$

$$Z = \lambda^{-1/2} \rho \sin\gamma \qquad \left| \frac{\partial(\Pi,\theta,Z)}{\partial(\rho,\gamma,\zeta)} \right| = \lambda^{-1/2} \rho$$

$$\theta = \zeta$$

I utilitzant els resultats que haviem obtingut,

$$\mu_{pqr} = \frac{\lambda^{-\frac{r+1}{2}}}{N} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\ \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+r+2}{2})} \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \rho^{p+r}\ \zeta^q\ \varphi(\rho^2,\zeta)\ \rho\, d\rho\, d\zeta \qquad (3.65)$$

i substituïnt φ, després d'algunes modificacions, (3.65) es transforma en

$$\mu_{pqr} = \frac{\lambda^{-\frac{r+1}{2}}}{2N} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\ \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+r+2}{2})} \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (\rho^2)^{\frac{p+r}{2}}\ \zeta^q\ P(\rho^2,\zeta)\, e^{-\frac{\rho^2+\eta\zeta^2}{a^2}}\, d(\rho^2)\, d\zeta$$

Finalment, amb el canvi de variables $\rho^2 = a^2 u$, $\zeta = a\eta^{-1/2} v$, tenim,

$$R_{sq} = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u^s\ v^q\ P(a^2u, a\eta^{-1/2}v)\ e^{-u}\ e^{-v^2}\ du\ dv \qquad (3.66)$$

amb

$$s = \frac{p+r}{2}, \qquad p \text{ i } r \text{ parells}$$

i

$$R_{sq} = R_{\frac{p+r}{2}\,q} = \frac{2N\ \Gamma(\frac{p+r+2}{2})\ \eta^{\frac{q+1}{2}}\ \lambda^{\frac{r+1}{2}}\ \mu_{pqr}}{a^{p+q+r+3}\ \Gamma(\frac{p+1}{2})\ \Gamma(\frac{r+1}{2})} \qquad (3.67)$$

Tornem a estar en la situació de (3.56), però en un cas bidimensional. Observant (3.66), veiem que e^{-u} és el pes associat als polinomis de Laguerre (apartat 2.4). En canvi, e^{-v^2} torna a ser el pes associat als polinomis d'Hermite (apartat 2.3).

Expressarem el polinomi P de (3.63) com

$$P(a^2u,\ a\eta^{-1/2}v) = \sum_{i_1,i_2} c_{i_1i_2}\ L_{i_1}(u)\ H_{i_2}(v) \tag{3.68}$$

Ja sabem que els polinomis

$$P_{ij}(u,v) = L_i(u)\ H_j(v)$$

formen un sistema ortogonal el $R^+ \times R$.

Els coeficients $c_{i_1i_2}$ de (3.68) seran, segons (2.16),

$$c_{i_1i_2} = \frac{1}{(P_{i_1i_2},\ P_{i_1i_2})} \sum_{j_1,j_2} B_{j_1j_2}^{i_1i_2}\ R_{j_1j_2} \tag{3.69}$$

amb $j_1 \leq i_1$, $j_2 \leq i_2$; $R_{j_1j_2}$ donat per (3.67) i $B_{j_1j_2}^{i_1i_2}$ els coeficients de la matriu que expressa els productes $L_{i_1}(u)\ H_{i_2}(v)$ en funció dels $u^{j_1}v^{j_2}$, calculables a partir de (2.22) i (2.34).

Com aquest és un cas més interessant que l'anterior, explicitem el producte escalar dels polinomis

$$(P_{ij},P_{ij}) = (L_i,L_i)\ (H_j,H_j)$$

Segons (3.55) i per (2.21) i (2.28),

$$(P_{ij},P_{ij}) = (i!)^2 \pi^{1/2} 2^j \; j! \qquad (3.70)$$

En resum, en el present cas, per a computar la FDD, amb els moments de que disposem, calculem (3.67). Seguidament, servint-nos de (2.22), (2.34) i (3.70), avaluem (3.69). D'aquesta forma, el polinomi (3.68) ens serà conegut i, conseqüentment la FDD (3.63).

Posant la FDD en funció de les integrals primeres, tindrem,

$$f = \bar{\varphi}(I+\lambda K,\ J) = \hat{P}(I+\lambda K,\ J)\ e^{-\frac{1}{a^2}(I+\lambda K+2\alpha J+\beta J^2)}$$

amb α i β satisfent (1.45) i (1.46) .

Com $f=\bar{\varphi}(I+\lambda K,J)$, es verifiquen les relacions corresponents a (1.38) i (1.39) :

$$\mu_{pqr} = \lambda^{\frac{p-r}{2}}\ \mu_{rqp} \ , \qquad p \text{ i } r \text{ parells}$$

$$\mu_{400} = 3\lambda\ \mu_{202}$$

Per tant, solament haurem de calcular els coeficients corresponents als moments $\mu_{000}=1$, μ_{200}, μ_{020}, μ_{210}, μ_{030}, μ_{220}, μ_{202} i μ_{040} . Hem reduït el problema al càlcul de vuit coeficients i si, semblantment a com s'indicava en l'apartat 3.1, escollim "a" i η (ja que λ ja vé fixat) per a que els moments μ_{200} i μ_{020}, per exemple, siguin els que donaria el pes w , considerat com a FDD (és a dir, considerar els coeficients que contribueixen a aquests mo -

ments nuls), ens estalviem calcular dos coeficients i, per tant, el problema es soluciona determinant, només, sis coeficients.

Es podrien fer més variacions sobre aquest mètode, canviant la forma de la funció pes, però els casos a) i b) semblen els que més lliguen amb el problema que estem tractant. És a dir, matemàticament, qualsevol funció pes es vàlida per a resoldre el problema, encara que no tingui res a veure amb la funció d'Schwarzschild, però, sembla que la usada en el cas b) és la que redueix més el càlcul de coeficients, donades les característiques del problema.

Seguint aquest mètode, hem obtingut una FDD expressada en funció d'una base ortogonal de funcions de l'espai L^2, que com s'ha vist a (2.18), tendeix en norma quadràtica a la FDD associada a la distribució de moments, a mesura que augmenta el nombre de moments coneguts. En aquest sentit, també cal dir que, utilitzant aquesta forma d'aproximació, només es pot assegurar que la FDD és positiva si tenim molts moments per a calcular-la (és a dir, assegurant la validesa de l'aproximació). En cas de conéixer pocs valors dels moments, és més satisfactòria l'aproximació per superposició de dues funcions de paritat diferent, que hem calculat en els apartats anteriors d'aquest capítol. Allà, sí que ens asseguravem de la positivitat de la FDD.

B I B L I O G R A F I A

Arnold, V.I., 1974: "Équations différentielles ordinaires". Ed.Mir, Moscou.

Arnold, V.I., 1978: "Mathematical methods of classical mechanics". Springer-Verlag, New York.

Colombo, S., 1959: "Les transformations de Mellin et de Hankel". Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

Chandrasekhar, S., 1942: "Principles of stellar dynamics". Chicago University Press.

Erickson, R.R., 1975: The third and fourth moments of the local stellar velocity distribution. Astrophys. J. 195, 343.

Gliese, W., 1969: Catalogue of nearby stars. Astronomisches Rechen-Institut. Heidelberg Veröf. nº22.

Hochstadt, H., 1973: "Les fonctions de la physique mathematique". Masson et Cie., Paris.

Kendall, M.- Stuart, A., 1977: "The advanced theory of statistics". Charles Griffin & Co. Ltd., London.

Kolmogórov, A.N.- Fomín, S.V., 1975: "Elementos de la teoria de funciones y del análisis funcional". Ed. Mir, Moscú.

Kurth, R., 1957: "Introduction to the mechanics of stellar systems". Pergamon Press, London.

Mihalas, D., 1968: "Galactic astronomy". W. H. Freeman and Company, San Francisco.

Núñez, J., 1981: Cinemática galáctica local y constante de precesión. Tesis doctoral. Univ. de Barcelona.

Ogorodnikov, K.F., 1965: "Dynamics of stellar systems". Pergamon Press, Oxford.

Orús, J.J.de, 1952: Contribución a la teoria de Chandrasekhar sobre la dinámica de los sistemas estelares. Collectanea Mathematica, 5, 3.

Orús, J.J. de, 1975: Distribución de las velocidades residuales de las estrellas en el entorno del sol. Actas de la I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica, Tenerife, p.121.

Orús, J.J. de, 1977: Apuntes de dinámica galáctica. Cátedra de Astronomía. Univ. de Barcelona.

Orús, J.J. de, 1980: Momentos centrados de las velocidades de las estrellas en el entorno del sol. Actas de la III Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica , Almería, p.835.

Perek, L., 1962: Distribution of mass in oblate stellar systems. Advances in Astronomy and Astrophysics. Vol. 1 . Ed. Zdeněk Kopal, Academic Press, New York.

Rényi, A., 1976: "Cálculo de probabilidades". Ed. Reverté, S.A., Barcelona.

Spain, B., 1960: "Cálculo Tensorial". Ed. Dossat, S.A., Madrid.