TRAYECTORIAS PERIÓDICAS DE BILLARES EN CIRCUNFERENCIAS PERTURBADAS

RAFAEL RAMÍREZ-ROS

RESUMEN. Hay una cantidad numerable de familias continuas de poligonos regulares (algunos estrellados, otros no) inscritos en una circunferencia. Cada polígono da lugar a dos trayectorias periódicas del billar en la circunferencia, una lo recorre en sentido horario y la otra en sentido antihorario. Presentamos un criterio, obtenido mediante métodos de tipo Melnikov, para decidir cuando esas familias continuas de trajectorias periódicas del billar son destruidas bajo pequeñas perturbaciones de la circunferencia.

INTRODUCCIÓN

Una de las primeras cuestiones que se plantean al tratar un conjunto invariante de un sistema dinámico consiste en estudiar su persistencia bajo perturbaciones de diferentes tipos. Por ejemplo, los puntos fijos hiperbólicos de aplicaciones persisten bajo perturbaciones generales (usando el Teorema de la Función Implícita) y los toros invariantes maximales con frecuencias diofantinas son persistentes bajo perturbaciones simplécticas (esto es la teoría KAM), mientras que los conjuntos invariantes compuestos por un continuo de subconjuntos invariantes no suelen ser persistentes. En esta comunicación nos centramos en el estudio de las curvas invariantes resonantes (es decir, compuestas por puntos periódicos) de aplicaciones generadas por el billar en circunferencias perturbadas.

Se puede desarrollar una teoría de Melnikov completa, muy similar a la expuesta, en el marco de las aplicaciones twist planas [8]. De hecho, los resultados se pueden generalizar hasta englobar el estudio de toros invariantes maximales completamente resonantes de aplicaciones twist en cualquier dimensión [7]. Sin embargo, para simplificar al máximo los aspectos técnicos y enfatizar los conceptos fundamentales, hemos restringido la exposición al estudio de billares en circunferencias perturbadas.

G. D. Birkhoff introdujo los billares, hace ya 75 años, para describir el movimiento de una partícula puntual dentro de curvas convexas cerradas del plano [2]. La partícula rebota de forma perfectamente elástica al chocar contra la curva, dando lugar a la siguiente ley de conservación: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Desde entonces los billares se han convertido en un ejemplo paradigmático dentro de los sistemas dinámicos conservativos. Probablemente, esto sea debido a que *en los billares los aspectos formales, usualmente tan formidables en cualquier problema dinámico, desaparecen casi por completo y sólo se necesitan considerar los aspectos cualitativos interesantes*, como el propio Birkhoff afirmaba. Las monografías [6, 9] muestran el gran desarrollo que en los últimos tiempos han experimentado los billares.

El billar plano más simple se obtiene cuando la curva es una circunferencia. En este caso, dado cualquier entero $q \geq 2$, el sistema dinámico asociado tiene $\phi(q)$ familias continuas de trayectorias q-periódicas, donde

$$\phi(q) := \#\{p \in \mathbb{Z} : 0 < p < q \text{ con } p \text{ y } q \text{ primos entre sí}\}.$$

Estas familias están asociadas a las diversas familias de polígonos regulares (algunos de ellos estrellados, otros no) de q lados inscritos en la circunferencia.

El principal resultado que queremos presentar es el siguiente teorema.

Teorema. *Sea $\rho_1 : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 cuya serie de Fourier es $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_1^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$ y $q \geq 2$ un entero. Si existe algún $j \in q\mathbb{Z}$ no nulo tal que $\rho_1^{(j)} \neq 0$, todas las familias de trayectorias q-periódicas dentro de la circunferencia*

$$C_0 = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = \rho_0\},$$

son destruidas por la perturbación

$$C_\epsilon = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1(\theta) + \mathrm{O}(\epsilon^2)\right\}.$$

Ejemplo. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $|\alpha| < 1$. La perturbación

$$\rho_1(\theta) = \frac{1 - \alpha\cos\theta}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2} = 1 + \sum_{j\geq 1} \alpha^j \cos j\theta = 1 + \sum_{0\neq j\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha^{|j|}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$$

destruye *todas* las familias de trajectorias periódicas.

Billares en curvas convexas

El primer paso para estudiar los billares consiste en modelar su dinámica de la forma más clara y transparente posible.

Sea C una curva convexa cerrada del plano. Sea $\gamma : \mathbb{T} \to C \subset \mathbb{R}^2$ una parametrización de esta curva, donde $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ será el espacio de configuración. Finalmente, consideramos el espacio de fases cilíndrico

$$\mathbb{A} := \mathbb{T} \times (0, \pi) = \{z = (\theta, r) : \theta \in \mathbb{T}, 0 < r < \pi\}.$$

Teniendo estas notaciones en mente, resulta bastante natural modelar la dinámica del billar en la curva C mediante la aplicación

$$f : \mathbb{A} \ni z = (\theta, r) \mapsto z' = (\theta', r') \in \mathbb{A}$$

definida como sigue. Cuando la partícula puntual choca en un punto $c = \gamma(\theta) \in C$ bajo un ángulo de incidencia r, el siguiente punto de impacto es $c' = \gamma(\theta') \in C$ y el siguiente ángulo de incidencia es r'.

La aplicación f tiene varias propiedades interesantes. A continuación, listamos las más importantes, todas ellas extraidas del libro [5, §9.2].

- *Regularidad.* Si la curva es C^k, la aplicación es un difeomorfismo C^{k-1}.
- *Conservación del área.* Sean $v = |\dot\gamma(\theta)|\cos r$ y $v' = |\dot\gamma(\theta')|\cos r'$. La aplicación conserva el área en las coordenadas (θ, v): $\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\theta' \wedge \mathrm{d}v'$.
- *Exactitud.* La aplicación f es exacta en las coordenadas (θ, v):

  $$v'\,\mathrm{d}\theta' - v\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}L(\theta, \theta').$$

  para alguna función $L(\theta, \theta')$ llamada *función generatriz* o *Lagrangiano* de f. No es díficil comprobar que $L(\theta, \theta') = |\gamma(\theta) - \gamma(\theta')|$.

- *Formulación implícita.* La aplicación f cumple las ecuaciones implícitas
$$f(\theta, r) = (\theta', r') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v & = & -\partial_1 L(\theta, \theta') \\ v' & = & \partial_2 L(\theta, \theta') \end{array} \right. .$$
- *Propiedad twist.* Fijado un punto de impacto $c = \gamma(\theta)$, la función
$$(0, \pi) \ni r \mapsto \theta'(\theta, r) \in \mathbb{T} \setminus \{\theta\}$$
es un difeomorfismo. En particular, dado cualquier par de puntos de impacto $c, c' \in C$ tales que $c' \neq c$, existe una única trayectoria que conecta c con c'.
- *Formulación Lagrangiana.* La dinámica del billar se puede expresar mediante ecuaciones (en diferencias) implícitas de segundo orden. Concretamente, dados tres puntos de impacto $c_-, c, c_+ \in C$ tales que $c = \gamma(\theta_-)$, $c = \gamma(\theta)$ y $c_+ = \gamma(\theta_+)$, existe una trayectoria que conecta c_- con c y después c con c_+ si y sólo si
$$\partial_2 L(\theta_-, \theta) + \partial_1 L(\theta, \theta_+) = 0.$$
- *Formulación variacional.* Las trajectorias de billar están en correspondencia con los puntos críticos del funcional
$$W : \mathbb{T}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}, \qquad W[(\theta_k)_{k\in\mathbb{Z}}] := \sum_{k\in\mathbb{Z}} L(\theta_{k-1}, \theta_k).$$
Aquí, la serie que define la *acción* W se entiende a nivel formal.

El billar en una circunferencia

Vamos a describir las trayectorias periódicas del billar asociado a la circunferencia
$$C_0 = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = \rho_0\}.$$
Sea $f_0 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la aplicación que modela el billar en C_0, basada en la parametrización
$$\gamma_0 : \mathbb{T} \to C_0 \subset \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_0(\theta) = \big(\rho_0\cos\theta, \rho_0\sin\theta\big).$$
Esta aplicación es integrable. De hecho, es bastante fácil comprobar que
$$f_0(\theta, r) = \big(\theta + \omega(r), r\big), \qquad \omega(r) = 2r.$$
Por tanto, dados dos números enteros primos entre sí p y q tales que $0 < p < q$, existe un único ángulo de incidencia $r_0^{p/q} \in (0, \pi)$ verificando la condición
$$\omega(r_0^{p/q}) = 2\pi p/q.$$
Esto significa que para todo número racional irreducible $p/q \in (0, 1)$, hay una familia continua de trayectorias p/q-periódicas en la circunferencia C_0. A modo de ejemplo, los cuatro tipos de trayectorias de periodo $q = 5$ son:

- Pentágonos regulares recorridos en sentido antihorario ($p = 1$).
- Pentagramas regulares recorridos en sentido antihorario ($p = 2$).
- Pentagramas regulares recorridos en sentido horario ($p = 3$).
- Pentágonos regulares recorridos en sentido horario ($p = 4$).

En general, las trajectorias p/q-periódicas son polígonos regulares de q lados inscritos en la circunferencia. Los polígonos son estrellados, excepto cuando $p = 1$ o $p = q - 1$.

El número p es igual al número de vueltas que la trayectoria periódica da alrededor del centro de la circunferencia, contabilizadas en sentido antihorario. En el contexto más general de las aplicaciones definidas sobre el cilíndro, diríamos que el *número de rotación* de la *curva invariante*

$$T_0^{p/q} = \Big\{ \big(\theta, r_0^{p/q}(\theta)\big) : \theta \in \mathbb{T} \Big\}, \qquad r_0^{p/q}(\theta) \equiv \pi p/q,$$

es $\omega_0^{p/q} := \omega\big(r_0^{p/q}\big) = 2\pi p/q$. En particular, la curva invariante $T_0^{p/q}$ es *resonante*, es decir, su número de rotación es $\mathbb{Q}$-conmensurable con 2π. Así pues, esta curva puede ser destruida por perturbaciones arbitrariamente pequeñas, aunque sean conservativas. (Recordamos que una de la hipótesis esenciales del *Teorema del twist de Moser*, referente a la persistencia de curvas invariantes de aplicaciones en el cilíndro bajo pequeñas pertubaciones conservativas es el carácter diofantino del número de rotación de la curva. Y no hay números menos diofantinos que los racionales.)

El billar en una circunferencia perturbada

Pasamos ahora a estudiar el efecto que perturbaciones del tipo

$$C_\epsilon = \big\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1(\theta) + \mathrm{O}(\epsilon^2) \big\}$$

tienen sobre la curva invariante resonante $T_0^{p/q}$. A partir de ahora, supondremos que p y q son enteros primos entre sí tales que $0 < p < q$.

Sea $f_\epsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la aplicación que modela el billar en C_ϵ, basada en la parametrización

$$\gamma_\epsilon : \mathbb{T} \to C_\epsilon \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\epsilon(\theta) = \big(\rho_\epsilon(\theta)\cos\theta, \rho_\epsilon(\theta)\sin\theta\big), \quad \rho_\epsilon(\theta) = \rho_0 + \epsilon\rho_1(\theta) + \mathrm{O}(\epsilon^2).$$

Finalmente, sea L_ϵ la función generatriz de f_ϵ.

Ya sabemos que, genéricamente, la curva $T_0^{p/q}$ será destruida por esta perturbación. ¿Es posible que persista algún objeto relacionado con esta curva? La respuesta es sí. Siguiendo ideas ya desarrolladas por G. D. Birkhoff y por V. I. Arnold en [1, §20], vemos que cerca de la curva resonante $T_0^{p/q}$ siempre existen un par de curvas que llamaremos *radiales*, debido a que la aplicación f^q envia cualquier punto de la primera curva al único punto de la segunda curva que tiene *la misma* componente angular θ, cambiando sólo la componente radial r.

Lema. *Existen unas únicas funciones* $r_\epsilon^{p/q}, \widehat{r}_\epsilon^{p/q} : \mathbb{T} \to (0,\pi)$ *tales que*

- $r_\epsilon^{p/q}(\theta), \widehat{r}_\epsilon^{p/q}(\theta) = r_0^{p/q}(\theta) + \mathrm{O}(\epsilon) = \pi p/q + \mathrm{O}(\epsilon)$ *uniformente en* $\theta \in \mathbb{T}$ *y*
- $f_\epsilon^q\big(\theta, r_\epsilon^{p/q}(\theta)\big) = \big(\theta, \widehat{r}_\epsilon^{p/q}(\theta)\big)$, *para toda* $\theta \in \mathbb{T}$.

Demostración. Aplicamos el Teorema de la Función Implícita a la ecuación

$$G^{p/q}(r,\epsilon;\theta) = \Pi\big(f_\epsilon^q(\theta, r)\big) - \theta = 0,$$

alrededor del punto $(r,\epsilon) = \big(r_0^{p/q}, 0\big)$, donde $\Pi : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$ denota la proyección del cilíndro $\mathbb{A} = \mathbb{T} \times (0, r)$ sobre $\mathbb{T}$. En este problema, las variables son r y ϵ, mientras que θ es un parámetro. Antes de despejar r en función de ϵ, basta comprobar que

$$G\big(r_0^{p/q}, 0; \theta\big) = 0, \qquad \partial_r G\big(r_0^{p/q}, 0; \theta\big) = q\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\big(r_0^{p/q}\big) = 2q \neq 0.$$

Una vez probada la existencia y unicidad de la función $r_\epsilon^{p/q} : \mathbb{T} \to (0,\pi)$ tal que

$$\Pi\Big(f_\epsilon^q\big(\theta, r_\epsilon^{p/q}(\theta)\big)\Big) = \theta, \qquad \forall\theta \in \mathbb{T},$$

definimos $\widehat{r}^{p/q}_\epsilon : \mathbb{T} \to (0,\pi)$ mediante la igualdad

$$f^q_\epsilon\big(\theta, r^{p/q}_\epsilon(\theta)\big) = \big(\theta, \widehat{r}^{p/q}_\epsilon(\theta)\big).$$

La uniformidad en θ se deduce de la compacidad de $\mathbb{T}$. □

Nota. La condición $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\big(r^{p/q}_0\big) \neq 0$ ha sido esencial en la prueba del lema. En contextos más generales, al estudiar una curva invariante resonante de una aplicación integrable arbitraria $f_0 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, esa condición equivale a pedir que f_0 sea *twist* en la curva.

Una vez que hemos probado la existencia de la funciones $r^{p/q}_\epsilon$ y $\widehat{r}^{p/q}_\epsilon$ del lema anterior, las curvas radiales que buscabamos vienen dadas por

$$T^{p/q}_\epsilon = \left\{\big(\theta, r^{p/q}_\epsilon(\theta)\big) : \theta \in \mathbb{T}\right\}, \qquad \widehat{T}^{p/q}_\epsilon \left\{\big(\theta, \widehat{r}^{p/q}_\epsilon(\theta)\big) : \theta \in \mathbb{T}\right\}.$$

Estas curvas tienen propiedades que las convierten en elementos útiles cuando se estudia la persistencia de curvas invariantes resonantes y se buscan puntos periódicos:

- *Persistencia.* La curva invariante resonante $T^{p/q}_0$ persiste si y sólo si $T^{p/q}_\epsilon = \widehat{T}^{p/q}_\epsilon$.
- *Puntos periódicas.* La intersección de las curvas radiales $T^{p/q}_\epsilon$ y $\widehat{T}^{p/q}_\epsilon$ da lugar a trayectorias p/q-periódicas del billar asociado a la perturbación C_ϵ. Basta observar que si $z^{p/q}_\epsilon = \big(\theta^{p/q}_\epsilon, r^{p/q}_\epsilon\big) \in T^{p/q}_\epsilon \cap \widehat{T}^{p/q}_\epsilon$, entonces $f^q_\epsilon\big(z^{p/q}_\epsilon\big) = z^{p/q}_\epsilon$.
- *Intersección.* Las curvas radiales $T^{p/q}_\epsilon$ y $\widehat{T}^{p/q}_\epsilon$ se intersecan. Efectivamente, pues f^q_ϵ transforma la región del cilíndro por debajo de la primera curva en la región por debajo de la segunda, al ser $f^q_\epsilon\big(T^{p/q}_\epsilon\big) = \widehat{T}^{p/q}_\epsilon$. La conservación del área en las coordenadas (θ, v) remata el argumento.

Debido a estas propiedades, resulta interesante cuantificar la separación entre las curvas radiales $T^{p/q}_\epsilon$ y $\widehat{T}^{p/q}_\epsilon$. Para eso tenemos la siguiente proposición.

Proposición. *Sea $W^{p/q}_\epsilon : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la función*

$$W^{p/q}_\epsilon(\theta) = \sum_{k=1}^{q} L_\epsilon\big(\theta^{p/q}_{k-1}(\theta;\epsilon), \theta^{p/q}_k(\theta;\epsilon)\big), \qquad \theta^{p/q}_k(\theta;\epsilon) = \Pi\Big(f^k_\epsilon\big(\theta, r^{p/q}_\epsilon(\theta)\big)\Big).$$

Entonces $\cos \widehat{r}^{p/q}_\epsilon(\theta) - \cos r^{p/q}_\epsilon(\theta) = \dot{W}^{p/q}_\epsilon(\theta)/|\dot{\gamma}_\epsilon(\theta)|$.

Demostración. No escribiremos la dependencia ni en ϵ ni en p/q, ya que no juegan nigún papel.

Fijado un ángulo arbitrario $\theta \in \mathbb{T}$, notamos

$$(\theta_k, r_k) = f^k\big(\theta, r(\theta)\big), \qquad v_k = |\dot{\gamma}(\theta_k)| \cos r_k, \qquad d_k = \partial_\theta \theta_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, q.$$

Entonces $\theta_0 = \theta_q = \theta$, luego $d_0 = d_q = 1$. Además, $r_0 = r(\theta)$ y $r_q = \widehat{r}(\theta)$. Usando la formulación Lagrangiana de la aplicación, obtenemos que

$$\partial_2 L(\theta_{k-1}, \theta_k) + \partial_1 L(\theta_k, \theta_{k+1}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, q-1.$$

Juntándolo todo,

$$\begin{aligned} \dot{W}(\theta) &= \partial_1 L(\theta_0, \theta_1) d_0 + \sum_{k=1}^{q-1} \big(\partial_2 L(\theta_{k-1}, \theta_k) + \partial_1 L(\theta_k, \theta_{k+1})\big) d_k + \partial_2 L(\theta_{q-1}, \theta_q) d_q \\ &= |\dot{\gamma}(\theta)| \big(\cos \widehat{r}(\theta) - \cos r(\theta)\big), \end{aligned}$$

pues las ecuaciones implícitas de la aplicación dan $\partial_1 L(\theta_0,\theta_1) = -v_0 = -|\dot\gamma(\theta)|\cos r(\theta)$ y $\partial_2 L(\theta_{q-1},\theta_q) = v_q = |\dot\gamma(\theta)|\cos\widehat{r}(\theta)$. $\square$

Corolario. *La derivada de la función* $W_\epsilon^{p/q} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *cuantifica la separación entre las curvas radiales. En particular:*

- *La curva invariante resonante* $T_0^{p/q}$ *persiste si y sólo si* $W_\epsilon^{p/q}(\theta)$ *es constante.*
- $\theta_\epsilon^{p/q} \in \mathbb{T}$ *es un punto crítico de* $W_\epsilon^{p/q}$ *si y sólo si* $z_\epsilon^{p/q} = \big(\theta_\epsilon^{p/q}, r_\epsilon^{p/q}(\theta_\epsilon^{p/q})\big) \in T_\epsilon^{p/q}$ *es un punto* p/q*-periódico de* f_ϵ.
- *Cerca de la curva* $T_0^{p/q}$ *persisten, al menos, dos trayectorias* p/q*-periódicas, que corresponden a los valores máximo y mínimo de la función* $W_\epsilon^{p/q}(\theta)$.

Una vez descritas las propiedades de la función $W_\epsilon^{p/q} = W_0^{p/q} + \epsilon W_1^{p/q} + \mathrm{O}(\epsilon^2)$, resulta natural intentar extraer información de sus primeros términos $W_0^{p/q}$ y $W_1^{p/q}$. Esta es la única idea que hay detrás de cualquier método de Melnikov [4, 3]. El término $W_0^{p/q}$ es constante y, por tanto, inútil. Denominaremos al término $W_1^{p/q}$ el *potencial de Melnikov subharmónico* asociado a la circunferencia perturbada C_ϵ y a la curva invariante resonante $T_0^{p/q}$.

Corolario. *Sea* $W_1^{p/q} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *el potencial de Melnikov subharmónico. Entonces:*

- *Si* $W_1^{p/q}(\theta)$ *no es constante, la curva invariante resonante* $T_0^{p/q}$ *es destruida por la perturbación* C_ϵ.
- *Si* $\theta_0^{p/q}$ *es un punto crítico no degenerado de* $W_1^{p/q}$, f_ϵ *tiene un punto* p/q*-periódico de la forma* $z_\epsilon^{p/q} = z_0^{p/q} + \mathrm{O}(\epsilon)$, *donde* $z_0^{p/q} = \big(\theta_0^{p/q}, r_0^{p/q}\big)$ *con* $r_0^{p/q} = \pi p/q$.

Proposición. $W_\epsilon^{p/q}(\theta) = W_0^{p/q}(\theta) + \epsilon W_1^{p/q}(\theta) + O(\epsilon^2)$, *donde*

- $W_0^{p/q}(\theta) \equiv 2\rho_0 q \sin(\pi p/q)$ *y*
- $W_1^{p/q}(\theta) = 2\sin(\pi p/q)\sum_{k=1}^{q} \rho_1(\theta + 2k\pi p/q)$.

Demostración. Está claro que el término $W_0^{p/q}(\theta)$ es constante, ya que

$$\dot W_0^{p/q}(\theta) = |\dot\gamma_0(\theta)|\big(\cos\widehat{r}_0^{p/q}(\theta) - \cos r_0^{p/q}(\theta)\big) \equiv 0.$$

El valor de la constante coincide con la longitud de los polígonos regulares inscritos que generan las trayectorias p/q-periódicas. Mediante trigonometría elemental, es fácil ver que, si el radio de la circunferencia es ρ_0, la longitud de esos polígonos es $2\rho_0 q\sin(\pi p/q)$.

A continuación, encaramos el cálculo del término $W_1^{p/q}$. Empezamos desarrollando la función generatriz L_ϵ de la aplicación f_ϵ en potencias de ϵ. Concretamente, escribimos $L_\epsilon = L_0 + \epsilon L_1 + \mathrm{O}(\epsilon^2)$. Entonces el término de orden $\mathrm{O}(\epsilon)$ de la función $W_\epsilon^{p/q}(\theta)$ es

$$\begin{aligned} W_1^{p/q}(\theta) \;=\; & \sum_{k=1}^{q} L_1\big(\theta_{k-1}^{p/q}(\theta;0), \theta_k^{p/q}(\theta;0)\big) + \\ & \partial_1 L_0\big(\theta_0^{p/q}(\theta;0), \theta_1^{p/q}(\theta;0)\big)\partial_\epsilon \theta_0^{p/q}(\theta;0) + \\ & \partial_2 L_0\big(\theta_{q-1}^{p/q}(\theta;0), \theta_q^{p/q}(\theta;0)\big)\partial_\epsilon \theta_q^{p/q}(\theta;0) + \\ & \sum_{k=2}^{q-1} \Big(\partial_1 L_0\big(\theta_k^{p/q}(\theta;0), \theta_{k+1}^{p/q}(\theta;0)\big) + \partial_2 L_0\big(\theta_{k-1}^{p/q}(\theta;0), \theta_k^{p/q}(\theta;0)\big)\Big)\partial_\epsilon \theta_k^{p/q}(\theta;0). \end{aligned}$$

Las líneas segunda y tercera de la ecuación anterior se anulan, pues

$$\theta_0^{p/q}(\theta;\epsilon) = \theta_q^{p/q}(\theta;\epsilon) = \theta, \qquad \forall \epsilon \simeq 0.$$

Recordando la fórmulación Lagrangiana (aplicada a la aplicación no perturbada f_0), vemos que la última línea también se anula.

Así, una primera expresión del potencial de Melnikov p/q-subharmónico es

$$W_1^{p/q}(\theta) = \sum_{k=1}^{q} L_1\big(\theta_{k-1}^{p/q}, \theta_k^{p/q}\big), \qquad \theta_k^{p/q} = \Pi\Big(f_0^k\big(\theta, r_0^{p/q}(\theta)\big)\Big) = \theta + 2\pi k p/q.$$

En los cálculos realizados hasta ahora no se ha usado en ningún momento que la aplicación $f_\epsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ proviene de un billar. Tan sólo se ha usado que la aplicación no perturbada $f_0(\theta, r) = (\theta + \omega(r), r)$ tiene una curva invariante p/q-resonante que cumple la condición twist $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\big(r_0^{p/q}\big) \neq 0$ y que la perturbación tiene una función generatriz Lagrangiana $L_\epsilon = L_0 + \epsilon L_1 + \mathrm{O}(\epsilon^2)$. La expresión obtenida del potencial de Melnikov p/q-subharmónico es, en consecuencia, totalmente válida en ese contexto más general.

Para la segunda parte de la prueba recordamos que la función generatriz del billar en la curva C_ϵ es $L_\epsilon(\theta, \theta') = |\gamma_\epsilon(\theta) - \gamma_\epsilon(\theta')|$, donde la parametrización $\gamma_\epsilon : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ está definida al principio de esta sección. Introduciendo, para abreviar, las notaciones

$$\gamma_k^{p/q} = \big(\rho_0 \cos\theta_k^{p/q}, \rho_0 \sin\theta_k^{p/q}\big), \quad u_k^{p/q} = \frac{\gamma_{k-1}^{p/q} - \gamma_k^{p/q}}{\big|\gamma_{k-1}^{p/q} - \gamma_k^{p/q}\big|}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y operando, se prueba que

$$L_1\big(\theta_{k-1}^{p/q}, \theta_k^{p/q}\big) = \big\langle u_k^{p/q}, \rho_1(\theta_k^{p/q})\gamma_k^{p/q} - \rho_1(\theta_{k-1}^{p/q})\gamma_{k-1}^{p/q}\big\rangle.$$

Por tanto, reordenando la suma que define el potencial de Melnikov subharmónico, llegamos al resultado final

$$\begin{aligned}
W_1^{p/q}(\theta) &= \sum_{k=1}^{q} L_1\big(\theta_{k-1}^{p/q}, \theta_k^{p/q}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{q} \big\langle u_k^{p/q}, \rho_1\big(\theta_k^{p/q}\big)\gamma_k^{p/q} - \rho_1\big(\theta_{k-1}^{p/q}\big)\gamma_{k-1}^{p/q}\big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{q} \big\langle u_k^{p/q} - u_{k+1}^{p/q}, \rho_1\big(\theta_k^{p/q}\big)\gamma_k^{p/q}\big\rangle \\
&= 2\sin(\pi p/q) \sum_{k=1}^{q} \rho_1\big(\theta_k^{p/q}\big),
\end{aligned}$$

pues $\theta_{q+k}^{p/q} = \theta_k^{p/q}$, $\gamma_{q+k}^{p/q} = \gamma_k^{p/q}$, $u_{q+k}^{p/q} = u_k^{p/q}$ y $\big\langle u_k^{p/q} - u_{k+1}^{p/q}, \gamma_k^{p/q}\big\rangle = 2\sin(\pi p/q)$, para toda $k \in \mathbb{Z}$. □

Nota. $W_1^{p/q}(\theta + 2\pi/q) = W_1^{p/q}(\theta)$, para toda $\theta \in \mathbb{T}$.

Para acabar, necesitamos el siguiente lema técnico, pero simple, donde se relacionan los coeficientes de Fourier de la perturbación $\rho_1(\theta)$ con el potencial de Melnikov p/q-subharmónico $W_1^{p/q}(\theta)$.

Lema. *Sea* $\rho_1 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *cuya serie de Fourier es* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_1^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$. *Entonces*

$$W_1^{p/q}(\theta) = 2q \sin(\pi p/q) \sum_{j\in q\mathbb{Z}} \rho_1^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}.$$

Demostración. Las fórmulas para sumar series geométricas implican

$$\sum_{k=1}^{q} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta+2k\pi p/q)} = \begin{cases} q\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}, & \text{si } j \in q\mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } j \notin q\mathbb{Z} \end{cases},$$

luego

$$\begin{aligned} W_1^{p/q}(\theta) &= 2\sin(\pi p/q) \sum_{k=1}^{q} \rho_1(\theta + 2k\pi p/q) \\ &= 2\sin(\pi p/q) \sum_{k=1}^{q} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_1^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta+2k\pi p/q)} \\ &= 2\sin(\pi p/q) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{q} \rho_1^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(\theta+2k\pi p/q)} \\ &= 2q\sin(\pi p/q) \sum_{j\in q\mathbb{Z}} \rho_1^{(j)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}. \end{aligned}$$

□

El Teorema de la introducción es una consecuencia de todo lo que acabamos de hacer.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la beca europea INTAS 00-221, la beca española DGICYT BFM2000-0805 y la beca catalana CIRIT 2000SGR-00027. El autor también desea expresar su agradecimiento a A. Delshams y V. Rothos.

Referencias

[1] V. I. Arnold y A. Avez. *Ergodic Problems of Classical Mechanics.* Benjamin, New York, 1968.
[2] G. D. Birkhoff. *Dynamical Systems.* AMS Publications, Providence, 1927.
[3] A. Delshams y R. Ramírez-Ros. Melnikov potential for exact symplectic maps. *Comm. Math. Phys.*, 190(1):213–245, 1997.
[4] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Springer, Berlin, 1983.
[5] A. Katok y B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
[6] V.V. Kozlov y D.V. Treshchëv. *Billiards: a genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, volumen 89 de *Transl. Math. Monographs.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
[7] R. Ramírez-Ros. Destrucción de toros completamente resonantes en aplicaciones twist cercanas a integrables. Charla dada en el *Aula de Sistemes Dinàmics de la UPC*, 2000. Accesible en la dirección `www-ma1.upc.es/recerca/repre2000.html`.
[8] R. Ramírez-Ros, V. Rothos y A. Delshams. Subharmonic Melnikov potential for twist maps and billiards. Preprint en progreso.
[9] S. Tabachnikov. *Billiards.* Panor. Synth. 1, SMF, Paris, 1995.

Departamento de Matemática Aplicada I, Diagonal 647, 08028 Barcelona