UNIVERSIDAD DE BARCELONA

SECCION DE PUBLICACIONES, EDICIONES,
INTERCAMBIO CIENTIFICO Y EXTENSION UNIVERSITARIA

VARIEDADES PROYECTIVAS DE GRADO MINIMO

Resumen de la Tesis presentada para aspirar
al grado de Doctor en Ciencias por

SEBASTIAN XAMBO DESCAMPS

BARCELONA — 1981

UNIVERSIDAD DE BARCELONA
FACULTAD DE MATEMATICAS

Tesis doctoral del Doctor D. SEBASTIAN XAMBO DESCAMPS.

Tema: "VARIEDADES PROYECTIVAS DE GRADO MINIMO".

TRIBUNAL DE TESIS

Presidente: D. JOSE M. AROCA HERNANDEZ-ROS
Catedrático de Geometria 3º
Facultad de Ciencias, Sección Matemáticas
Universidad de Valladolid

Vocales: D. JUAN AUGE FARRERAS
Catedrático de Análisis Matemático 3º (Ecuaciones Diferenciales)
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

D. JOSE TEIXIDOR BATLLE
Catedrático de Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

D. RAFAEL MALLOL BALMAÑA
Catedrático de Algebra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

D. EDUARDO CASAS ALVERO
Profesor Agregado de Geometría Analítica (Variedades Algebraicas)
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

Director: D. RAFAEL MALLOL BALMAÑA
Catedrático de Algebra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

Realizada la presentación y lectura de la tesis en fecha trece de los corrientes, obtuvo la calificación de SOBRESALIENTE "cum laude".

Barcelona, 31 de Marzo de 1981.

EL DECANO,

VARIEDADES PROYECTIVAS DE GRADO MINIMO

Sebastián Xambó Descamps

INTRODUCCION

Este trabajo consiste en diversas contribuciones al estudio de las variedades de grado mínimo así como en algunas aplicaciones de algunos de los resultados. En particular se aplica a mejorar y explicitar la enumeración de las cuárticas de Swinnerton-Dyer.

Agradezco a todas aquellas personas que me han ayudado su interés y generosidad. En especial a David Eisenbud, quien atrajo mi atención por el tema y cuya correspondencia me ha ayudado decisivamente. A Rafael Mallol, por su paciencia. A José Ma Giral, por sus valiosas sugerencias y por el tiempo que ha pasado oyendo mis argumentos. A Eduardo Casas, por haberme señalado diversos errores y por sus valiosas críticas. A Karl y Bárbara Knight, quienes fueron hospitalarios conmigo. A M. Harris, M. Levine y O. Manzoli, que no han cesado de animarme. A mi esposa, Elionor, y a mis hijas, Anna y Marta, cuyo esfuerzo en ningún caso ha sido inferior al mio.

Barcelona, Marzo de 1981

S. Xambó.

CONTENIDO

I PRELIMINARES

Generalidades 1

Secciones hiperplanas 1

Grado 1

Grado mínimo 3

Variedades regladas 4

Variedad de cuerdas 5

II VARIEDADES CONEXAS EN CODIMENSION UNO DE GRADO MINIMO

Variedades conexas en codimensión k 7

Construcción de variedades irreducibles de grado mínimo 9

Variedades regladas racionales normales 11

Teorema de Del Pezzo-Bertini 14

Directrices de una superficie RRN 16

III SECCIONES LINEALES DE VARIEDADES RRN

Secciones lineales 18

Variedades $L(2,q)$ 19

Variedad polar de un espacio lineal respecto de un sistema lineal de cuádricas 21

IV CUARTICAS

Cúbicas 23

Cuárticas 23

Cuárticas no singulares 24

Distinción de los diversos casos 25

NOTAS 26

BIBLIOGRAFIA 27

I PRELIMINARES

Generalidades

Sea $\mathbb{P}_n$ el espacio proyectivo de dimensión n definido sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. El cuerpo K será fijo y le llamaremos cuerpo base; a $\mathbb{P}_n$ le llamaremos el espacio proyectivo ambiente.

Por variedad de dimensión d entenderemos una variedad algebraica proyectiva de dimensión pura d. Supondremos además que son reducidas y, si $d \geq 1$, que son conexas. A las variedades de dimensión 1 y 2 las llamaremos curvas y superficies respectivamente. Dada una variedad irreducible V de dimensión d, a las variedades de dimensión d-1 contenidas en V las llamaremos hipersuperficies de V.

Secciones hiperplanas

Dada una variedad V de dimensión d, existen siempre hiperplanos H tales que H no contiene a ninguna de las componentes de V (diremos que H intersecta propiamente a V), en cuyo caso $H \cap V$ es no vacía y todas sus componentes tienen dimensión d-1. Diremos que $H \cap V$ es una sección hiperplana de V. Si $d \geq 2$ esta sección es conexa cuando V es irreducible.

Grado

Consideremos ahora una variedad lineal L de codimensión d que corte a la variedad irreducible V en un número finito de puntos $P_1,\dots,P_s$. Cada P_i aparece con una multiplicidad bien determinada m_i en la intersección $L \cap V$ ([W1], p. 119, Th. 2) (con los paréntesis cuadrados denotamos las entradas de bibliografía al final). La suma de las multiplicidades m_i es independiente del espacio lineal L ([W1], p. 229, Th. 2) y se la llama grado u orden de V. Lo denotaremos deg(V). En el caso de que la intersección $L \cap V$ sea transversal en cada P_i se tiene que $m_i = 1$ ([W1], p. 122, Prop. 7), de donde resulta que en este caso el grado es simplemente igual al número de puntos de intersección. En particular resulta que deg(V) es igual al número de puntos de intersección de V con un espacio lineal genérico de codimensión d (por [W1], p.229, Coroll., o, alternativamente, [S2], II, §6, 7, e). Este resultado será utilizado a veces bajo la siguiente forma: si V tiene dimensión d y grado g, si L tiene codimensión d y si $L \cap V$ contiene al menos g+1 puntos, entonces $L \cap V$ contiene una curva. Finalmente, si V es reducible, una variedad lineal genérica L de codimensión d no puede tener puntos comunes a dos componentes, dado que una variedad lineal genérica de codimensión d no corta a una variedad dada de dimensión inferior a d. Así que el número de puntos de $L \cap V$ es igual a la suma del número de puntos de intersección con cada una de las componentes de V, por lo que es natural definir el grado g de V por la relación $g = g_1 + \ldots + g_r$, donde $g_j = \deg(V_j)$. Que esta definición de grado coincide con la definición en el sentido de la forma de Chow-Van der Waerden se puede ver por ejemplo en [S1] (p. 67), o bien en el artículo original [H1]. El grado se puede también calcular por medio del polinomio de Hilbert $P_V(t)$ de la variedad V: el grado de este polinomio es igual a la dimensión d de V y el coeficiente de t^d es g/d!, siendo $g = \deg(V)$ ([S3] , p. 214). Combinando los anteriores resultados llegamos al siguiente método para calcular el grado:

1. Sea V una variedad proyectiva y pongamo I para denotar el ideal homogéneo de V. Sean $h_1,\ldots,h_d$ formas lineales en $X_0,\ldots,X_n$, donde $d = \dim(V)$ y pongamos

$$\delta_m = \dim_K \left(K[X_0,\ldots,X_n] / (I,h_1,\ldots,h_d) \right)_m .$$

Entonces, si δ_m es constante para $m \gg 0$, $g = \delta_m$ para $m \gg 0$. Por otra parte δ_m siempre es constante para $m \gg 0$ si las $h_1,\ldots,h_d$ son genéricas.

Grado mínimo

Cambiando $\mathbb{P}_n$ por la envoltura lineal $\langle V \rangle$ de nuestra variedad V siempre podemos suponer que V no está contenida en ningún hiperplano de $\mathbb{P}_n$. Así lo haremos en lo sucesivo.

2. Si V es una variedad irreducible de $\mathbb{P}_n$ de dimensión d y grado g entonces

$$g \geq n-d+1 = c+1$$

siendo c la codimensión de V.

Una demostración de esta proposición resulta inmediatamente del hecho que si H es un hiperplano genérico de $\mathbb{P}_n$ entonces $H \cap V$ tiene el mismo grado que V ([S2] , p. 106, Exemple 1), es irreducible ([W1] , p.300, Th. 16), y su envoltura lineal es H.

A las variedades de $\mathbb{P}_n$ cuyo grado es igual a c+1 las llamaremos variedades irreducibles de grado mínimo de $\mathbb{P}_n$. Antes de explicitar la estructura de estas variedades notemos que

3. Una variedad irreducible de grado mínimo de $\mathbb{P}_n$ es linealmente normal y racional.

Demostración: Si V fuese proyección de una $W \subset \mathbb{P}_{n+1}$ del mismo grado que V, dim $\langle W \rangle \leq g+d-1 = n$ y por tanto de hecho W está contenida en un hiperplano de $\mathbb{P}_{n+1}$. Para ver que es racional, tómense $g-1$ puntos genéricos independientes de V, $P_1,\ldots,P_{g-1}$ y proyectemos V sobre $\mathbb{P}_d$ desde estos puntos. Entonces vemos que esta proyección es de hecho birracional (hay que utilizar el hecho que si P es otro punto genérico independiente entonces $P+P_1+\ldots+P_{g-1}$ corta a V en P con multiplicidad 1, y que esta multiplicidad es el índice de inseparabilidad de P sobre su proyección en $\mathbb{P}_d$ ([W1], p. 125, Th. 3)).

Variedades regladas

Para nuestros propósitos llamaremos variedades regladas (VR) a las variedades de $\mathbb{P}_n$ que son lugar de ∞^1 subespacios lineales de dimensión $d-1$. Con más precisión, sea $Gr_{n,d-1}$ la variedad grassmanniana de espacios linales de dimensión $d-1$ de $\mathbb{P}_n$ ([H-P], vol. II) y sea C una curva contenida en $Gr_{n,d-1}$. Consideremos la correspondencia $I \subset C \times \mathbb{P}_n$ dada por incidencia, $(t,x) \in I$ si y sólo si $x \in L_t$, siendo L_t el espacio lineal de dimensión $d-1$ que corresponde a t. Entonces la familia $\{L_t\}_{t \in C}$ es (por definición) una familia ∞^1 de subespacios de dimensión $d-1$ y $V = \bigcup_{t \in C} L_t$ se llama una variedad reglada. A los espacios L_t los llamaremos generatrices de V. Si C es cerrada, y por tanto proyectiva, $V = I[C]$ será proyectiva ([W2], § 33). Si C no es cerrada, sea $\bar{C}$ su clausura por la topología de Zariski, de modo que $\bar{C} = C \cup \{t_1,\ldots,t_s\}$. Entonces si $\bar{V} = \bigcup_{t \in \bar{C}} L_t$ tenemos que $\bar{V}$ es una variedad proyectiva y que V es un abierto denso de V (de hecho V contiene a $\bar{V}-(L_{t_1} \ \ldots \ L_{t_s})$). Es decir, $\bar{V}$ es la clausura de V por la topología de Zariski de $\mathbb{P}_n$. Estas consideraciones nos muestran que siempre podemos suponer que la curva C (y por tanto la variedad V) es cerrada. Si C es racional diremos que V es una variedad reglada racional (VRR).

4. Sea Gr_{n,d_i}, $i = 1,2$, la grassmanniana de espacios lineales de dimensión d_i contenidos en $\mathbb{P}_n$ y sean $u:G \to Gr_{n,d_1}$, $v:G \to Gr_{n,d_2}$ morfismos, donde G es una variedad irreducible. Supongamos que $L_{v(x)} \subseteq L_{u(x)}$ para un punto genérico x de G. Entonces $L_{v(x)} \subseteq L_{u(x)}$ para todo x de G.

Esta proposición se demuestra sin dificultad por medio de la teoría de correspondencias. Nos interesa el siguiente corolario:

5. Sea V una variedad reglada y sea $H \subseteq \mathbb{P}_n$ un hiperplano que no contiene a V. Pongamos $\bar{V}$ para indicar el cierre de la variedad casiproyectiva obtenida reuniendo los $H \cap L$, donde L recorre el conjunto de generatrices que no están contenidas en H. Entonces $\bar{V} \cap L$ contiene un espacio lineal de dimensión d-2 para toda generatriz L, donde $d = \dim(V)$.

Variedad de cuerdas

Dada una variedad irreducible V de $\mathbb{P}_n$, formemos el conjunto $Z \subseteq V \times V \times \mathbb{P}_n$ cuyos puntos (x,x',z) satisfacen las condiciones $x \neq x'$, $z \in \langle x,x' \rangle$, y sea $\bar{Z}$ su clausura (de Zariski). Como $pr_{V\times V}:\bar{Z} \to V\times V$ tiene fibra genérica una recta, resulta que $\dim(\bar{Z}) = 2d+1$, siendo $d = \dim(V)$. Ahora se llama variedad de cuerdas de V a la variedad L_1V definida por $L_1V = pr_{\mathbb{P}_n}(\bar{Z})$.

Está claro que L_1V contiene, y es la clausura de, $pr_{\mathbb{P}_n}(Z)$, que es el lugar de los puntos z que pertenecen a cuerdas $\langle x,x'\rangle$ de V. L_1V contiene además "límites" o "especializaciones" de dichas secantes. De todo ello resulta que

6. $\dim(L_1V) = 2d+1-\delta$

siendo δ la dimensión del sistema de secantes de V que pasan por un punto genérico de L_1V.

En particular resulta que a fin de que $L_1V = \mathbb{P}_n$ es necesario que $2d+1 \geqq n$.

En el caso de que $V = W*L$ (es decir, el cono sobre W con vértice el espacio lineal L) se verifica inmediatamente que

7. $L_1V = (L_1W)*L$.

II VARIEDADES CONEXAS EN CODIMENSION UNO DE GRADO MINIMO

Variedades conexas en codimensión k

La noción de variedad conexa en codimensión k fue introducida por Hartshorne [H6]. Esta noción se ha mostrado de interés para nuestros fines. En el caso de variedades equidimensionales se puede reformular con más facilidad debido a la siguiente proposición:

8. Sea $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ una variedad proyectiva de dimensión d y sea $k \geq 0$ un entero. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

   (i) V-W es conexa para todo cerrado $W \subset V$ tal que $\operatorname{codim}_V W > k$.

   (ii) Para $j = 2,\ldots,r$ (posiblemente después de reordenar), $\operatorname{codim}_{V_j} V_j \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_{j-1}) \leq k$.

A las variedades que satisfacen esta condición (a nosotros nos interesa la segunda forma) las llamaremos conexas en codimensión k.

Puesto que el grado mínimo de una variedad reducible puede ser menor que el mínimo para las irreducibles (como lo muestra el ejemplo de dos planos en $\mathbb{P}_4$ que se cortan en un único punto), y puesto que tenemos interés en estudiar variedades conexas en codimensión uno, nos planteamos la cuestión de hallar la estructura de las variedades V conexas en codimensión uno (no contenidas en ningún hiperplano) tales que $g \leq n-d+1$. La respuesta a esta cuestión está contenida en el siguiente teorema:

9. Sea $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ una variedad conexa en codimensión uno, no contenida en ningún hiperplano, tal que $g \leq n-d+1$, siendo g su grado y d su dimensión. Pongamos $L_i = \langle V_i \rangle$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) V_i es irreducible de grado mínimo en L_i.

(ii) $g = n-d+1$.

(iii) $V_j \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_{j-1}) = L_j \cap (L_1 + \ldots + L_{j-1})$, tal vez después de cambiar el orden de las componentes, $j = 2, \ldots, r$, y este espacio lineal tiene dimensión $d-1$.

Demostración: Pongamos $n_i = \dim(L_i)$, $e_j = \dim L_j \cap (L_1 + \ldots + L_{j-1})$. Entonces de la fórmula de las dimensiones resulta que $e_j = n_j + \dim(L_1 + \ldots + L_{j-1}) - \dim(L_1 + \ldots + L_j)$, $j = 2, \ldots, r$. Sumando todas estas desigualdades hallamos que $e_2 + \ldots + e_r = n_1 + \ldots + n_r - \dim(L_1 + \ldots + L_r)$. Ahora si $g_i = \deg(V_i)$, $g = g_1 + \ldots + g_r$, tenemos que $n_i \leq g_i + d - 1$ (por 2), que $g \leq n-d+1$ (por hipótesis), que $\dim(L_1 + \ldots + L_r) = n$ (puesto que V no está contenida en ningún hiperplano), y que $e_j \geq d-1$ (pues $V_j \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_{j-1})$ está contenida en $L_j \cap (L_1 + \ldots + L_{j-1})$). De todo ello resultan las desigualdades

$$
\begin{aligned}
(r-1)(d-1) &\leq e_2 + \ldots + e_r = n_1 + \ldots + n_r - n \\
&\leq g + r(d-1) - n \leq (r-1)(d-1).
\end{aligned}
$$

Se sigue que todos los signos de desigualdad han de ser igualdad. En particular hallamos que $e_j = d-1$, que $g = n-d+1$ y que $n_i = g_i+d-1$. De ahí resultan inmediatamente todas las afirmaciones.

El teorema 8 reduce el estudio de las variedades reducibles conexas en codimensión uno de grado mínimo al estudio de las variedades irreducibles de grado mínimo.

Construcción de variedades irreducibles de grado mínimo

El caso de las curvas está claro: una curva irreducible de grado mínimo n en $\mathbb{P}_n$ es una curva proyectivamente equivalente a la imagen de $\mathbb{P}_1$ en $\mathbb{P}_n$ por el sistema lineal completo $|\mathcal{O}(n)|$. A estas curvas se las denomina racionales normales (CRN). A la imagen de $\mathbb{P}_1$ por el citado sistema lineal la denotaremos $S(n)$.

A continuación mencionamos algunos resultados suplementarios sobre estas curvas. En primer lugar, sea V una curva irreducible de grado n en $\mathbb{P}_n$ y sea x un punto. ¿Se puede reducir el par (V,x) a forma canónica? Para el caso $n = 3$ y $n = 4$ (que son los que tienen interés para nosotros) tenemos lo siguiente:

10. Si V es una cúbica de $\mathbb{P}_3$ y x un punto fuera de la misma, existe una transformación proyectiva de $\mathbb{P}_3$ que transforma (V,x) en $(S(3),P)$ o bien en $(S(3),P_1)$, siendo $P = (0,1,0,1)$, $P_1 = (0,1,0,0)$. Vale la primera reducción o la segunda según que x no pertenezca o pertenezca a la superficie de tangentes de V.

11. Si (V,x) es una cuártica de $\mathbb{P}_4$, x un punto fuera de V, y si ponemos $P = (0,1,0,0,0)$, $P = (0,1,0,1,0)$, $Q_a =$

$(0,1,0,1,a)$, siendo $a \neq 0$, entonces existe una transformación proyectiva de $\mathbb{P}_4$ que transforma (V,x) en $(S(4),P_1)$, o en $(S(4),P)$, o en $(S(4),Q_a)$. Ocurre la primera reducción si y sólo si x pertenece a la superficie de tangentes de V; la segunda si y sólo si x no está en la superficie de tangentes pero pertenece a la variedad (de dimensión tres) de cuerdas de V; la tercera si y sólo si x no pertenece a la variedad de cuerdas.

Se sabe que dados $n+3$ puntos en posición general de $\mathbb{P}_n$, entonces existe una única curva racional normal que los contiene. Pongamos $P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}$ para denotar dichos puntos. Cambiando de sistema de coordenades podemos suponer que los $n+1$ primeros forman los puntos de referencia, que P_{n+1} es el punto unitario y que $P_{n+2} = (a_0, \ldots, a_n)$. ¿Cómo se expresan entonces las ecuaciones de la única CRN que pasa por ellos? A tal fin pongamos $Y_i = (a_n X_i - a_i X_n)/(a_n - a_i)$. Entonces

12. Las ecuaciones

$$\det_2 \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \ldots & X_{n-1} \\ Y_0 & Y_1 & \ldots & Y_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

(obtenidas tomando los determinantes de orden 2 de la matriz e igualándolos a cero) representan a la única CRN que pasa por $P_0, \ldots, P_{n+2}$.

Por otra parte es bien sabido, e inmediato de demostrar, que $S(n)$ admite ecuaciones de la forma

13. $$\det_2 \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \ldots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{pmatrix} = 0.$$

Agrupemos en un enunciado otros tipos de variedades irreducibles de grado mínimo:

15. (i) Las hipersuperficies de grado mínimo son las cuádricas.

(ii) Las superficies V_2^4 de Veronese son de grado mínimo (es decir, superficies de $\mathbb{P}_5$ proyectivamente equivalentes a la imagen de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_5$ por el sistema lineal completo $|\mathcal{O}(2)|$).

(iii) Un cono formado con directriz irreducible de grado mínimo es una variedad irreducible de grado mínimo.

La familia más importante de variedades irreducibles de grado mínimo la forman las llamadas variedades regladas racionales normales. Vamos a dedicarles un punto aparte.

Variedades regladas racionales normales

Por conveniencia del lector vamos a reproducir la definición de [H3]. Sean $L_1,\dots,L_d$ espacios lineales de $\mathbb{P}_n$, $n_1,\dots,n_d$ sus dimensiones y supongamos que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_d \geq 0$, $n_1 \geq 1$, $L_1+\dots+L_d = \mathbb{P}_n$, L_j disjunto de $L_1+\dots+L_{j-1}$ $(j = 2,\dots,d)$. Sea k el índice tal que $n_k \geq 1$, $n_{k+1} = 0$, de modo que $1 \leq k \leq d$. Para cada $j = 1,\dots,k$, sea V_j un CRN de L_j y $h_j:\mathbb{P}_1 \to V_j$ isomorfismos. Para los j tales que $k+1 \leq j \leq d$ (si es que existe alguno), sea $V_j = L_j$ (= un punto) y $h_j:P_1 \to V_j$ la aplicación constante. Finalmente pongamos $S(n_1,\dots,n_d)$ para indicar la reunión de los espacios lineales de dimensión d-1

$$G_t = \langle h_1(t),\dots,h_d(t)\rangle \quad , \ t\in \mathbb{P}_1 .$$

Diremos que $S = S(n_1,\dots,n_d)$ es una variedad reglada racional normal (VRRN). Nótese que si $d = 1$ entonces la variedad que obtenemos es denotada $S(n)$ y consiste en una curva racional normal de $\mathbb{P}_n$, lo que muestra que no hay conflicto con el anterior significada de $S(n)$.

16. Las variedades RRN tienen las siguientes propiedades:

(i) No están contenidas en ningún hiperplano.

(ii) $\deg(S(n_1,\ldots,n_d)) = n_1+\ldots+n_d = n-d+1$,
de modo que son variedades irreducibles de grado mínimo.

(iii) $S(n_1,\ldots,n_d)$ es no singular si y sólo si $n_d \geq 1$.
$S(n_1,\ldots,n_k,0,\ldots,0)$ es un cono de directriz $S(n_1,\ldots,n_k)$ y vértice $L_{k+1}+\ldots+L_d$, de donde es singular sólo en los puntos del vértice.

(iv) Dos variedades de tipo $S(n_1,\ldots,n_d)$ son proyectivamente equivalentes.

(v) Una cuádrica de rango 3 es una $S(2,0,\ldots,0)$; una de rango 4, una $S(1,1,0,\ldots,0)$. Las de rango ≥ 5 no son ni siquiera regladas.

(vi) S admite ecuaciones de la forma $\det_2(A) = 0$, siendo $A = (A_1|\ldots|A_d)$, y siendo A_i una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} X_{i0} & X_{i1} & \cdots & X_{i,n_i-1} \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{i,n_i} \end{pmatrix}$$

donde las X_{ij} forman un sistema de coordenadas de $\mathbb{P}_n$.

(vii) $S(1,\overset{d)}{\ldots},1)$ es proyectivamente equivalente a la imagen de $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_{d-1}$ en $\mathbb{P}_{2d-1}$ por el morfismo de Segre.

A estos resultados añadimos el siguiente teorema:

17. $L_1 S = \mathbb{P}_n$ si y sólo si $n_1=3$ y $n_2 \leq 1$, o bien $n_1 \leq 2$, $n_2 \leq 2$ y $n_3 \leq 1$.

La demostración de este hecho se efectúa por medio de 6 y 7, que lo reducen a la comprobación de diversos casos, los cuales verifican la propiedad especificada como se muestra por reducción a determinadas propiedades de S(3) y de las cónicas.

$S(n_1,\ldots,n_d)$ se puede también definir como la imagen del espacio proyectivo correspondiente al fibrado $\mathcal{O}(-n_1)+\ldots+\mathcal{O}(-n_d)$ de $\mathbb{P}_1$ por medio del sistema lineal completo $|\mathcal{O}(1)|$. Utilizando esta descripción hemos determinado Pic(S) y Ch(S), cuando S es no singular. Aquí Pic(S) indica el grupo de las clases de divisores por la equivalencia lineal y Ch(S) el anillo de las clases de equivalencia racional de ciclos con el producto inducido por el producto de intersección. En lo sucesivo denotaremos por H y G las clases de equivalencia lineal de una sección hiperplana de S y de una generatriz respectivamente. Entonces:

18. Pic(S) es libre con dos generadores libres H, G. Además se verifican las siguientes relaciones: $H^{(d)} = gP$, siendo P la clase de equivalencia racional de un punto, $G.G = 0$, $G.H^{(d-1)} = P$. ($H^{(j)}$ denota la clase de equivalencia racional de la autointersección de H consigo mismo j veces).

El divisor canónico de S, K_S, se expresa por la fórmula $K_S = (g-2)G-dH$.

Combinando el teorema anterior con un teorema general sobre el anillo de Chow, debido a Grothendieck, hallamos

19. Ch(S), como grupo abeliano, es libre con base $1, H, H^{(2)}, \ldots, H^{(d-1)}$, $L_1, \ldots, L_d$, siendo L_j la clase de equivalencia racional correspondiente a un subespacio lineal de una generatriz cuya codimensión en S sea j (en particular L_d es la clase de un punto). En cuanto al producto se verifican las relaciones

$H^{(i)}.H^{(j)} = H^{(i+j)}$, $L_i.H^{(j)} = L_{i+j}$, $L_i.L_j = 0$,

entendiendo que $H^{(d)} = gL_d$ y que $H^{(j)} = L_j = 0$ si $j > d$.

Teorema de Del Pezzo-Bertini

Este teorema nos da una clasificación proyectiva completa de las variedades irreducibles de grado mínimo:

20. Toda variedad irreducible de grado mínimo de $\mathbb{P}_n$ es de uno de los siguientes tipos:

(i) Una cuádrica de rango $r \geq 5$.

(ii) Conos sobre superficies de Veronese.

(iii) Variedades RRN.

Es además fácil ver que estas clases son disjuntas. De hecho ahora lo único que haría falta ver es que un cono sobre una superficie de Veronese no puede ser reglada.

Para superficies el teorema dice que las superficies de grado n-1 de $\mathbb{P}_n$ son, con la única excepción de las superficies de Veronese, superficies RRN. Con este enunciado este teorema fue probado por Del Pezzo [P1] (cf. [B1], Cap. XV, §10). Al parecer fue Bertini quien lo generalizó a dimensiones superiores bajo la siguiente forma: Una variedad irreducible de grado mínimo que no sea cuádrica ni cono sobre una superficie de Veronese es una variedad reglada racional (pero Bertini no prueba que el reglaje sea normal, es decir, dado por las curvas RN $V_1,\ldots,V_d$ que intervienen en la definición de $S(n_1,\ldots,n_d)$; en particular, tampoco estipula cuales son los posibles tipos proyectivos). Finalmente J. Harris prueba [H3] que una variedad irreducible de grado mínimo que sea reglada ha de ser ya RRN.

Como J. Harris utiliza el teorema fuerte de las secciones hiperplanas de Lefschetz en su demostración del teorema de Del Pezzo-Bertini, y que a nuestro parecer sus argumentos ofrecen algunas lagunas, nosotros hemos procedido de la siguiente manera:

Hemos probado que una variedad irreducible de grado mínimo reglada es RRN por medio del teorema 9 aplicado a secciones hiperplanas convenientemente escogidas (por 5 son conexas en codimensión uno). A seguido, se prueba el teorema de Del Pezzo directamente. Esto lleva a poder suponer que $3 \leq d \leq n-2$. Y si así es, distinguimos dos casos (a) Un espacio lineal genérico de dimensión $n-d+2$ corta a V en una superficie RRN, (b) idem en una superficie de Veronese V_2^4. En el primer caso se prueba que V es reglada, y por tanto RRN. En el segundo caso se prueba directamente (sin utilizar el citado teorema de Lefschetz) que V es un cono sobre una V_2^4. Esto da una demostración elemental del teorema de Del Pezzo-Bertini.

Una primera aplicación interesante de 20 es que

21. Una sección hiperplana irreducible de una variedad RRN es una variedad RRN.

Directrices de una superficie RRN

Para ver otro ejemplo de la potencia del teorema 20, vamos a explicar primero una construcción de superficies regladas y que en ciertos casos da superficies de grado mínimo. Sin embargo, cuando esto ocurre, puede ser que de ningún modo sea evidente que el reglaje es de hecho racional normal, aunque el citado teorema nos garantiza que así es.

Consideremos dossubespacios lineales L_1 y L_2 de $\mathbb{P}_n$ tales que $L_1+L_2 = \mathbb{P}_n$ y con $m_1 \geq m_2 \geq 1$, siendo $m_i = \dim(L_i)$. Para $i = 1,2$, sea $V_i \subseteq L_i$ una curva tal que $\langle V_i \rangle = L_i$. Supongamos además que tenemos un isomorfismo birracional $h:V_1 \to V_2$. Pongamos S para indicar la superficie reglada que se obtiene uniendo los pares de puntos que se corresponden por h, es decir, S es la clausura de la unión de las rectas de la forma $\langle t,h(t) \rangle$ donde t recorre los puntos de V_1 en los que h está definida y tales que $h(t) \neq t$ (lo que ocurrirá para todo t salvo un número finito). Para determinar el grado de S, sean g_1 y g_2 los grados de V_1 y V_2 respectivamente y $Q_1,\ldots,Q_f$ los puntos fijos de h (puede ocurrir que no haya ninguno). Supondremos que los Q_i son simples sobre V_1 y V_2. Entonces tenemos el siguiente teorema:

22. $\deg(S) = g_1+g_2-f.$

La demostración es una interesante aplicación de la teoría de correspondencias. Como corolario tenemos:

23. La superficie S construida antes es de grado mínimo si y sólo si V_i es una CRN de L_i y $f = m+1$, siendo $m = \dim(L_1 \cap L_2)$.

Una curva D contenida en una variedad reglada V será llamada una directriz si corta a toda generatriz en un único punto y $\langle D\rangle \cap V = D$. Ahora el criterio 23, aplicado a dos directrices convenientes de una superficie RRN, combinado con otras consideraciones, permite demostrar el siguiente teorema:

24. Sea D una curva irreducible no generatriz de una superficie $S = S(n_1,n_2)$. Entonces si $n = n_1+n_2+1$ y $g = n-1$,

a) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) D es una directriz.

(ii) $\langle D\rangle \neq \mathbb{P}_n$.

(iii) $\deg(D) = g$.

b) Si D verifica estas condiciones, entonces D es una CRN de $\langle D\rangle$.

c) Dos directrices de grados m_1 y m_2 se cortan en $f = m_1+m_2-g$ puntos.

III SECCIONES LINEALES DE VARIEDADES RRN

Secciones lineales

El teorema que demostramos, y del cual damos luego un par de aplicaciones, es el siguiente:

25. Sea $S = S(n_1,\dots,n_d)$ una variedad reglada racional normal de $\mathbb{P}_n$ y sea L un subespacio lineal tal que $L \cap S$ sea equidimensional. Entonces

$$L \cap S = \bar{S} \cup F_1 \cup \dots \cup F_s,$$

donde $\bar{S}$ es una variedad RRN (posiblemente vacía) y donde $F_1,\dots,F_s$ son espacios lineales tales que cada uno de ellos está contenido en una generatriz de S (s puede ser también cero). Además cada F_j corta a $\bar{S}$ a lo largo de una generatriz de $\bar{S}$ y $L \cap S$ es de grado mínimo (como variedad conexa en codimensión uno) en su envoltura lineal.

Demostración: Vamos a dar las ideas más importantes. Si ponemos δ para indicar la dimensión de $L \cap S$, ocurre que L corta a un número finito (tal vez cero) de generatrices de S en espacios lineales de dimensión δ, sean $F_1,\dots,F_s$, y a las restantes G tales que $L \cap G \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_s$ en dimensión $\delta-1$ (si es que hay alguna de estas). Si las hay, las intersecciones $L \cap G$ generan al variar G, y después de cerrar, una variedad reglada $\bar{S}$. Entonces $L \cap S = \bar{S} \cup F_1 \cup \dots \cup F_s$ es conexa en codimensión uno. Ocurre que $\delta \leq \dim(L) \leq g+\delta-1$, $g = \deg(S)$.

Si $\dim(L) = g+\delta-1$, entonces se puede ver que $L \cap S$ tiene grado inferior o igual al mínimo dentro de $\langle L \cap S \rangle$, espacio que podemos suponer, por un fácil argumento adicional, igual a L. Siendo conexa en codimensión uno le podemos aplicar 9 y concluimos.

Si $\dim(L) < g+\delta-1$, entonces existe un espacio L^* de dimensión una unidad superior tal que $L^* \supset L$ y con $L^* \cap S = \bar{S} \cup F_1 \cup \ldots \cup F_s \cup F_{s+1} \cup \ldots \cup F_r$, siendo los nuevos F_i espacios lineales de dimensión δ contenidos en generatrices de S. Entonces el resultado se sigue por inducción descendente respecto de la dimensión de L.

Como corolario hallamos que

26. Toda sección lineal irreducible de una variedad RRN es una variedad RRN. En particular, toda sección lineal irreducible de la imagen de $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N$ en $\mathbb{P}_{2N+1}$ por el morfismo de Segre es una variedad RRN.

Se puede ver que recíprocamente, toda variedad RRN es sección lineal de una variedad de Segre $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N$:

27. Sea $S = S(n_1,\ldots,n_d)$ una variedad RRN de dimensión d y grado $g = n_1+\ldots+n_d$ no contenida en ningún hiperplano de $\mathbb{P}_n$ $(n = g+d-1)$. Sea $N = g-1 = n-d$. Entonces existe un espacio lineal L_n de dimensión n de $\mathbb{P}_{2N+1}$ tal que $S = L \cap \sigma(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N)$.

Esto se puede ver muy rápidamente por medio de las ecuaciones 16 (vi).

Variedades L(2,q)

A lo largo de la memoria hemos encontrado ecuaciones de la forma

$$(*) \qquad \det{}_2 \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_q \\ v_1 & \dots & v_q \end{pmatrix} = 0,$$

donde las u_i y las v_j son formas lineales en de $\mathbb{P}_n$(ecuaciones 12, 13 y 16(vi)). ¿Qué representarán en general las ecuaciones (*)? A las variedades equidimensionales representadas por ecuaciones (*) las podemos llamar variedades L(2,q). También, para simplificar la nomenclatura, a las variedades que verifican la conclusión de 25 las llamaremos coronas. Entonces tenemos:

28. Una variedad L(2,q) de $\mathbb{P}_n$ es una corona. Si no está contenida en ningún hiperplano(*) de $\mathbb{P}_n$ su grado es q.

Demostración: Sea $m = \dim\langle u_1,\dots,u_q,v_1,\dots,v_q\rangle$. Tomemos p variables $X_{n+1},\dots,X_{n+p}$, $p = 2q-m$, y sustituyamos p de las formas $u_1,\dots,u_q,v_1,\dots,v_q$ por ellas de modo que las 2q componentes de la matriz resultante

$$M' = \begin{pmatrix} u'_1 & \dots & u'_q \\ v'_1 & \dots & v'_q \end{pmatrix}$$

sean linealmente independientes. Sea V' la variedad de $\mathbb{P}_{n+p}$ dada por $\det(M') = 0$. Esta variedad no es otra que la variedad $\sigma(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_{q-1})$ de Segre y por construcción V es la intersección de V' con el espacio lineal L dado por las ecuaciones $X_j - w_j = 0$, $j = 1,\dots,p$, siendo w_j la forma lineal que había sido sustituida por X_j en la matriz (2,q) inicial. Por 25 concluimos que V es una corona (en particualar, una variedad RRN si es irreducible).

Supongamos ahora que V no está contenida en ningún hiperplano,

(*) Hay que suponer además que su codimensión es la genérica.

en cuyo caso V es de grado mínimo en $\mathbb{P}_n$ y por tanto

$\deg(V) = n-d+1 = c+1 = c'+1 = q$, siendo c la codimensión de V en $\mathbb{P}_n$ y c' la de V' en $\mathbb{P}_{n+p}$ (observamos que de hecho $p = 2q-1-n$).

Variedad polar de un espacio lineal respecto de un sistema lineal de cuádricas

Un ejemplo interesante en el que se puede aplicar el teorema anterior viene dado al considerar el lugar de los espacios polares de un espacio lineal dado con respecto de un haz de cuádricas.

Sea en efecto $A = U+tV$ un tal haz, $U = (u_{ij})$, $V = (v_{ij})$, $1=i,j=n$, de modo que las cuádricas Q_t del haz son de la forma $XAX^T = 0$. Sea L un espacio lineal, que podemos suponer coincidente con el dado por las ecuaciones $X_{m+1}=\ldots=X_n=0$ (es decir, L es el espacio lineal generado por los puntos $P_0,\ldots,P_m$ del sistema de referencia por lo que en particular su dimensión es m). El espacio polar de L con respecto de Q_t es el espacio lineal L_t^* dado por las intersecciones de las polares de $P_0,\ldots,$ P_m, es decir, por las ecuaciones $P_jAX^T = 0$, $j = 0,\ldots,m$. Estas ecuaciones equivalen a las ecuaciones $u_j+tv_j=0$, siendo $u_j = \sum_i u_{ji}X_i$, $v_j = \sum_i v_{ji}X_i$. Vemos pues que si ponemos $L^* = \bigcup_t L_t^*$, entonces L^* está contenida en la variedad dada por las ecuaciones $\det_2(M) = 0$, siendo M la matriz $(2,m)$ formada con las formas u_i y v_j. Y recíprocamente.

29. Si $\dim(L_t^*)$ es constante, entonces L^* es una variedad RRN.

Demostración: Si $\dim(L_t^*)$ es constante, entonces la correspondencia $I \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_n$ tal que $(t,x) \in I$ si y sólo si $x \in L^*_t$ es irreducible (cf. [W2], §33), de donde resulta que $L^* = I[\mathbb{P}_1]$ es irreducible. Esto, 28, y la forma que adoptan las ecuaciones de L^* nos muestra que L^* es RRN.

30. Con las mismas hipótesis, si $\bar{n} = \dim\langle L^*\rangle$ y $d = \dim(L^*)$, entonces $g = n-d+1 = n-d'$, siendo $d' = \dim(L^*_t)$.
En particular, bajo hipótesis "genéricas", $d' = n-m-1$, $\bar{n}= n$, de donde $g = m+1 = \dim(L)+1$.

Lo anterior nos da una conexión entre las cuárticas de codimensión dos que son intersección de dos cuádricas y las variedades RRN. En el capítulo siguiente aplicacamos las variedades RRN para hallar una "enumeración" de las cuárticas.

IV CUARTICAS

Cúbicas

Una variedad cúbica puede tener codimensión uno o dos; en el primer caso es una hipersuperficie cúbica; en el segundo es de grado mínimo, de donde se tratará de una variedad S(3), una S(2,1), o una S(1,1,1), o conos sobre las mismas (por el teorema de Del Pezzo-Bertini). Además, una sección hiperplana irreducible de una variedad de uno de estos tipos es una variedad del tipo que le precede. Por medio del teorema 25 se pueden enumerar fácilmente todas las secciones hiperplanas reducibles de estas variedades. El lector puede comparar esta versión (expuesta independientemente por Saint-Donat [S5]) con la original hallada por A. Weil [XXX]).

Cuárticas

Una variedad cuártica puede tener codimensión uno, dos o tres. En codimensión uno se trata de una hipersuperficie cuártica. En codimensión tres son de grado mínimo y por consiguiente (debido al teorema 20) se tratará de una variedad de uno de los siguientes tipos:

31. S(4),

S(2,2), S(3,1), V_2^4

S(2,1,1)

S(1,1,1,1)

o conos sobre las anteriores.

Además, las secciones hiperplanas irreducibles de uno nivel anterior (V_2 no puede ser sección hiperplana de $S(2,1,1)$, siendo esta la única excepción).

En cuanto a las cuádricas de codimensión dos, llevando el álisis de Swinnerton-Dyer [S1] hasta el final a la luz de anterior hallamos lo siguiente:

. Toda cuártica irreducible de codimensión dos, no contenida en ningún hiperplano, pertenece a una de las sigueintes clases:

(a) Una intersección completa de dos cuádricas.

(b) Una variedad de una de las formas

$\pi S(4)$,

$\pi S(2,2)$, $\pi S(3,1)$, πV_2^4

$\pi S(2,1,1)$

$\pi S(1,1,1,1)$

y conos sobre las mismas.

ií utilizamos π para denotar una proyección desde un punto ılquiera exterior a la variedad.

rticas no singulares

Toda cuártica no singular pertenece a uno de los siguientes tipos:

Si tiene codimensión uno, una hipersuperficie no singular.

Si tiene codimensión dos, una intersección completa no singular de dos cuádricas, o una proyección de $S(4)$ desde un punto exterior a su variedad de cuerdas, o una proyección de V_2^4 en las mismas condiciones.

Si tiene codimensión tres, una variedad de uno de los siguientes tipos:

$S(4)$; $S(2,2)$, $S(3,1)$, V_2^4; $S(2,1,1)$; $S(1,1,1,1)$.

Este teorema es una consecuencia directa de 17 y 32.

Puede tener interés mencionar que por medio de 25, 32 y la clasificación de las cúbicas dada arriba, se pueden describir las secciones hiperplanas reducibles de las cuárticas con detalle.

Distinción de los diversos casos

Pongamos $i_V(2)$ para denotar la dimensión del sistema lineal de cuádricas que contienen la variedad V. Entonces tenemos:

34. Sea V una cuártica de codimensión dos. Entonces:

(a) Si $i_V(2) \geq 1$, V es una intersección completa de dos cuádricas, en cuyo caso $i_V(2) = 1$.

(b) Si $i_V(2) = 0$, V es de la forma πS, siendo S una cuártica RRN de codimensión tres.

(c) Si $i_V(2) = -1$, V es un cono sobre πV_2^4.

NOTAS

1. El caso de curvas correspondiente al teorema 9 se puede hallar, en una forma algo menos completa, en [A1] .

2. Del teorema 25 en la literatura he podido hallar el caso de tener (en nuestro lenguaje) una sección lineal de S(1,1,...,1) que corte a cada generatriz en un punto exactamente, en cuyo caso se prueba que es una curva RN. Véase [B2].

3. La demostración de 18 es una generalización del método que utiliza Hartshorne [H2] para hallar el Pic de una superficie racional.

4. Para ver ejemplos donde aparecen variedades RRN en otros contextos geométricos, véase [H4] , [H5] de un lado, y de otro [S5].

5. El teorema 20 se halla también enunciado en [S5] , pero no se adjunta ninguna demostración. Misteriosamente, tampoco la hay en ninguna de las tres referencias que da.

BIBLIOGRAFIA

A1 Artin, M.
Deformation of Singularities
Institute of Fundamental Research (Bombay, 1976)

B1 Bertini, E.
Introduzione a la Geometria Proiettiva degli Iperspazi
Giuseppe Principato (Messina, 1923)

B2 Burau, W.; Zeuge, J.
Über den Zusammenhang zwischen den Partitionen einer natürlichen Zahl und den linearen Schnitten der einfachsten Segremanigfaltigkeiten
Crelle J. 274/275 (1975) 104-111

G-H Griphiths, Ph.; Harris, J.
Principles of Algebraic Geometry
John Wiley and Sons, 1978

H1 Hedge, K.
The associated form of a variety over a field of prime characteristic p
Commentarii Math. Helvetici 30(1956)124-138

H2 Hartshorne, R.
Algebraic Geometry
Springer, GTM 52, 1977

H3 Harris, J.
Tesis (Harvard)

H4 Horikawa, E.
On the deformations of quintic surfaces
Invent. Math. 3(1975)43-85

H5 Horikawa, E.
Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, I
Ann. Math. 104(1976)357-387

H6 Hartshorne, R.
Complete intersections and connectedness
J. Amer. Math. Soc. 84(1962)497-508

H-P Hodge, W. V. D.; Pedoe, D.
Methods of Algebraic Geometry, vol II
Cambridge University Press, 1952

P1 Del Pezzo
Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n+1 dimensioni
Rend. dell'Acad. di Napoli, 1885

S1 Shaffarevich, I.
Basic Algebraic Geometry
Springer, 1974
Grundlehren der math. Wissenschaften 213

S2 Samuel, P.
Méthodes d'Algebre Abstraite en Géométrie Algébrique
Springer, 1967, 2a ed.
Ergebnisse 4

S3 Samuel, P.
Sur la notion de multiplicité en Algebre et en Géométrie Algébrique
Journal de Mathématiques 30(1951)159-274

S4 Swinnerton-Dyer, H. P. F.
An enumeration of all varieties of degree 4
Amer. J. Math. 95(1973)403-418

S5 Saint-Donat
Canonical equations of K-3 surfaces
Amer. J. Math. 96(1974)602-639

W1 Weil, A.
Foundations of Algebraic Geometry
Amer. Math. Soc., 1962 (2a ed.)

W2 Van der Waerden, B. L.
Einführung in die algebraische Geometrie
Springer, 1973 (2a ed.)

XXX X.X.X.
Correspondence
Amer. J. Math. 79(1957)951-952

Depósito Legal B.: 26.502-1981
EDICIONES DE LA UNIVERSIDAD DE BARCELONA