

Desarrollo de un método mixto malla-partícula para la animación de fluidos.

Autor 1 Autor 2

Dept. 1 Dept. 2

Universidad 1 Universidad 2

Dir. 1 Dir. 2

Resumen

En este artículo se describen brevemente dos de los métodos más usados en la Simulación de Fluidos para la Animación por Ordenador: el *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) y el *Marker and Cell* (MAC). Ambos son utilizados como base para generar un nuevo método híbrido que aproveche la rapidez en los cálculos del MAC y el nivel de detalle del SPH en superficie. Este tipo de método es de mucha utilidad para problemas con un gran volumen de fluido donde los fenómenos que requieren un alto nivel de detalle ocurren en la superficie. Finalmente se presentan algunos ejemplos de simulación con este nuevo método.

1 Introducción

En el mundo de la Simulación de Fluidos las ecuaciones que se toman como referencia para el modelado de fenómenos cotidianos (corrientes de agua, líquido en recipientes e incluso humo a bajas velocidades) son las Ecuaciones de *Navier-Stokes* para Flujos Incompresibles y Viscosos¹:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \vec{u} + \vec{g} \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

De los diversos planteamientos de resolución numérica de estas ecuaciones han ido surgiendo diferentes métodos, cada uno de ellos con

¹Las incógnitas son \vec{u} y p , velocidad y presión respectivamente. Re es el Número de *Reynolds*.

sus ventajas e inconvenientes. Entre ellos, podemos destacar dos:

El *Marker and Cell*, método de planteamiento euleriano donde las incógnitas se calculan sobre una malla del dominio y la posición del fluido queda definida mediante partículas marcadoras, que se mueven con el campo de velocidades. Se trata de un método con buena velocidad de cálculo para problemas que no requieren un gran nivel de detalle [2].

El *Smoothed Particle Hydrodynamics*, método de planteamiento lagrangiano donde el fluido está representado por partículas, cada una de ellas con sus valores y características asociadas, que son las que determinan el movimiento del fluido. Este método permite obtener un alto nivel de detalle, pero conlleva una carga computacional importante, ya que el comportamiento de cada partícula depende de las que la rodean en cada instante [4].

Aunque existen otros métodos interesantes, como el semi-lagrangiano de J. Stam [5], hemos tomado el MAC y el SPH como base para este trabajo por tratarse de métodos ampliamente utilizados (en sus diversas versiones) para la simulación de líquidos con muy buenos resultados y ser claramente complementarios: nuestro objetivo será la creación de un nuevo método que combine el MAC, para las zonas de gran volumen que no precisen de una simulación muy detallada, con el SPH, para aquellas que sí la necesiten. De esta forma, ganaremos en tiempo de cálculo sin perder nivel detalle.

En los 2 siguientes apartados veremos algunas de las características de las versiones de MAC y SPH que hemos implementado en 2D.

2 Modelo MAC

El punto de partida del método son las ecuaciones (1) reescritas para 2 dimensiones²:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} + g_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} + g_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Para la resolución numérica de estas ecuaciones, se *voxeliza* el área de simulación en rectángulos de lados paralelos a los del dominio. En el centro de cada una de estas celdas resultantes calculamos el valor de su presión y en los puntos medios de sus lados derecho y superior, las velocidades horizontal y vertical, respectivamente (*Staggered Grid*). Hecho esto, introducimos las modificaciones correspondientes en las ecuaciones.

2.1 Discretización en espacio y tiempo

Aproximamos las derivadas espaciales utilizando diferencias divididas (d.d.) regresivas, centradas o progresivas, dependiendo de la magnitud considerada y el orden de derivación. Para los términos convectivos se utiliza una mezcla de d.d. centradas y discretización *Donnor-Cell*, consiguiendo una mayor estabilidad cuando estos términos son los dominantes.

Para las derivadas temporales se utilizan d.d. progresivas y se toman los valores de p en tiempo $t^{(n+1)}$, obteniendo un método implícito en presiones³:

$$\begin{aligned}u^{(n+1)} &= F^{(n)} - dt \left[\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x} \right] \\ v^{(n+1)} &= G^{(n)} - dt \left[\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y} \right]\end{aligned}\quad (3)$$

² u y v representan las velocidades en dirección horizontal y vertical y g, las fuerzas de volumen.

³ (n+1) hace referencia a la nueva etapa de tiempo, para la que desconocemos los valores de u, v y p. [] denota discretización en espacio.

2.2 Cálculo de las presiones

Llegados a este punto, el problema queda resuelto si calculamos los valores de presión de las celdas para $t^{(n+1)}$. Para ello, intruducimos las expresiones de (3) en la última de las ecuaciones (2) y obtenemos una Ecuación de *Poisson* para las presiones

$$\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y} \right) \quad (4)$$

que resolvemos con el método iterativo de *Sobre-Relajación*.

2.3 Contacto con sólidos y superficie libre

Uno de los factores que más complica la programación de la resolución de las ecuaciones así discretizadas es la necesidad de asignar valores a las diferentes magnitudes sobre los sólidos que interaccionan con el fluido. Dichos valores dependerán de las condiciones de contorno elegidas.

Por otra parte, para simular el comportamiento de la superficie libre del fluido también son necesarios valores de presión y velocidad adecuados, que se asignan estudiando cada una de las celdas que componen la superficie.

3 Modelo SPH

El movimiento de las partículas que forman el fluido está regido por la 2ª Ley de *Newton*, $F = m.a$. Así, una vez conocidas las fuerzas que actúan sobre ellas, podemos conocer las nuevas velocidades y posiciones.

Los cálculos se realizan con una técnica de interpolación basada funciones de núcleo, $W_h(x)$, que aproximan la función δ y que describen el comportamiento de las características asociadas a cada partícula en su entorno.

Utilizando esta técnica, las ecuaciones que modelan el fluido se transforman en⁴:

$$F_i^{\nabla P} = -m_i \sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_h^{ij} \quad (5)$$

⁴ $\nabla_i W_h^{ij}$ es la derivada con respecto a las coordenadas espaciales de la partícula i de $W_h(x_i - x_j)$

4.1 Ejemplos

La Figura 3 muestra un líquido en reposo sobre el que se deja caer una columna del mismo líquido situada en su parte izquierda. Se observa cómo las velocidades de las partículas SPH afectan a las del campo MAC y viceversa.

En la Figura 2 pueden verse varios fotogramas de la caída de una gota en un recipiente con fluido.

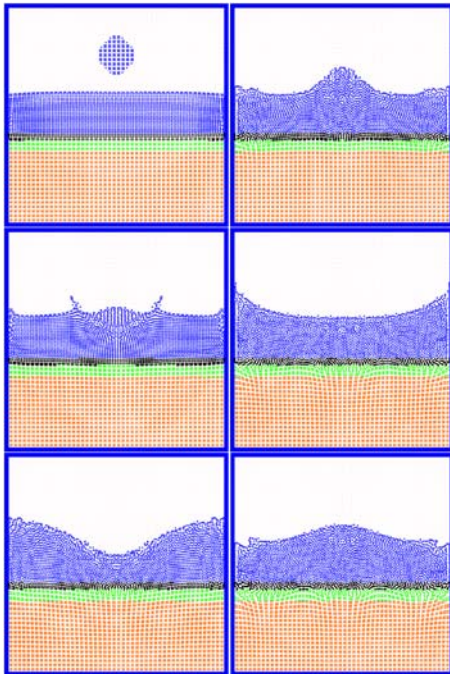


Figura 2: Gota de fluido

5 Conclusiones y trabajo futuro

Presentamos un nuevo método en el que MAC y SPH interactúan con el objetivo de minimizar la carga computacional en problemas donde existen partes del dominio con características muy diferenciadas.

Aunque todavía no se ha realizado un estudio detallado y comparado de los tiempos de ejecución, la mejora es notable de forma inmediata, como teóricamente cabía esperar.

Entre las cuestiones a mejorar, la compatibilidad en el tratamiento de las condiciones de contorno de los 2 métodos, que puede producir perturbaciones en el campo de velocidades, y la automatización del proceso de ajuste de parámetros de ambos métodos para conseguir la continuidad entre ellos, que actualmente depende casi por completo del usuario.

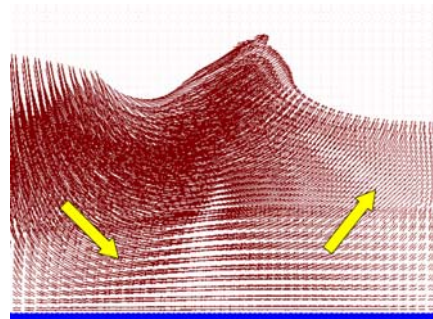


Figura 3: Velocidades de partícula

En definitiva, estamos ante un método 2D en el que las técnicas utilizadas tienen su extensión natural a 3D y que puede ofrecer muchas ventajas en el campo de la Simulación de Fluidos para la Animación por Ordenador.

Referencias

- [1] Desbrun, M., Cani, M., *Space-Time Adaptive Simulation of Highly Deformable Substances*, Tech. Report 3839, INRIA, 1999.
- [2] Griebel, M. et al., *Numerical Simulation in Fluid Dynamics-A Practical Introduction*, SIAM, 1998.
- [3] Monaghan, J., Kos, A., *Solitary Waves on a Cretan Beach*, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., 1999.
- [4] Müller, M., Charypar, D., Gross, M., *Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications*, Proc. Eurographics/SIGGRAPH Sym., 154-159, 2003.
- [5] Stam, J., *Flows on Surfaces of Arbitrary Topology*, ACM TOG, vol 22, 3: Proc. SIGGRAPH 2003, 724-731, 2003.