Geometria Diferencial 2 — examen final — 2 juny 2009

PROBLEMA 1 — SOLUCIÓ

1 pt (a) X és el generador infinitesimal de les rotacions al pla $\mathbf{R}^2$, i les seves òrbites són l'origen (punt d'equilibri) i les circumferències amb centre a l'origen. Per tant, aquestes circumferències són varietats integrals de D: si C és una d'elles i $p \in C$ tenim $\mathrm{T}_pC = \langle X_p \rangle = D_p$.

2 pt (b) Prenem $p = (0,0,0)$, i sigui N una presumpta varietat integral que el contingui. X i Y són doncs tangents a N.
La corba integral de X per $(0,0,0)$ és calcula fàcilment: $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = y \end{cases}$, amb la condició inicial, dóna $(x(t), y(t), z(t)) = (t, 0, 0)$.
Doncs, d'acord amb el lema, els punts $(a, 0, 0)$, amb a en un veïnat de 0, pertanyen a N.
Ara calculem la corba integral de Y pel punt $(a, 0, 0)$: $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$, amb la condició inicial, dóna $(x(t), y(t), z(t)) = (a, t, 0)$.
Una altra vegada, doncs, tenim que hi ha punts $(a, b, 0) \in N$ si a, b són prou properes a 0.
Resulta doncs que $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ està dins N, almenys per als punts en un veïnat de 0.
Tanmateix, això porta a una contradicció, perquè si $q = (a, b, 0)$, amb $b \neq 0$ prou petit, tenim que $\mathrm{T}_q(\mathbf{R}^2 \times \{0\}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Big|_q , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_q \right\rangle$ no està dins $\mathrm{T}_qN = D_q = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\Big|_q + b\,\frac{\partial}{\partial z}\Big|_q , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_q \right\rangle$.

2 pt (c) En cada punt de U tenim $Y(p)$ combinació lineal de la base $(X_1(p), \ldots, X_r(p))$, d'on $Y = \sum_{k=1}^r g^k X_k$. Cal veure que els coeficients g^k són funcions diferenciables.
Sigui $p \in U$, i (x^i) un sistema de coordenades en p. Escrivim $X_k = \sum_i a^i{}_k \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. La relació entre els X_k i Y s'expressa doncs amb l'equació lineal $\sum_k a^i{}_k g^k = b^i$.
La solució d'un sistema lineal compatible determinat es pot expressar com a funció racional de les dades. En aquest cas, les g^k són funcions racionals de les $a^i{}_k$ i les b^i, que són funcions diferenciables, de manera que les g^k també són diferenciables (en un veïnat de p).
Això ho podem fer al voltant de qualsevol p, d'on resulta que les g^k són diferenciables en U.
(Podem precisar més l'obtenció de les g^k. Essent els X_k linealment independents arreu, la matriu $A = (a^i{}_k)$ té rang màxim r. Reordenant les coordenades, i prenent si cal un obert més petit, podem suposar que $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, on la matriu A_1 és invertible. Així el sistema anterior és $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$, d'on resulta $\begin{pmatrix} g \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$, funcions diferenciables.)

1 pt (d) Calculem $[X, Y] = -\dfrac{\partial}{\partial z}$. Aquest no és combinació lineal de X i Y, ja que per exemple la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \end{pmatrix}$ té rang 3. Per tant $[X, Y]$ no pertany a D.

1 pt (e) Siguin $Y, Z \in \mathfrak{X}_D$. Escrivim-los $Y = \sum_k g^k X_k$, $Z = \sum_\ell h^\ell X_\ell$, i calculem-ne el parèntesi de Lie: $[Y, Z] = \sum_{k,\ell} g^k h^\ell [X_k, X_\ell] + \sum_k (Y \cdot h^k - Z \cdot g^k) X_k$. Per tant, si els $[X_k, X_\ell]$ pertanyen a D, també hi pertany qualsevol parèntesi de Lie $[Y, Z]$.

1'5 pt (f) Si Y, Z són camps vectorials en M tangents a una subvarietat $M_\circ \subset M$, llavors restringeixen a camps vectorials $Y_\circ, Z_\circ$ en $M_\circ$, i, si denotem per j la inclusió de la subvarietat, $Y_\circ, Z_\circ$ estan j-relacionats amb Y, Z. Per tant $[Y_\circ, Z_\circ]$ està j-relacionat amb $[Y, Z]$, la qual cosa significa en particular que $[Y, Z]$ és tangent a $M_\circ$.

1'5 pt (g) Siguin Y, Z camps vectorials en M que pertanyen a la distribució D. Sigui $p \in M$ un punt qualsevol, i $N \ni p$ una varietat integral de D. Per hipòtesi Y, Z són tangents a N. Pel lema anterior, $[Y, Z]$ també és tangent a N, i això prova que $[Y, Z]_p \in \mathrm{T}_pN = D_p$. Essent p arbitrari, resulta que $[Y, Z]$ pertany a la distribució.