Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

Apunts i problemes de repàs per a l'assignatura de Geometria Diferencial 2
Llicenciatura de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

27 gener 1998 / revisat 25 juny 2007

Sumari

0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial

En aquestes notes es pressuposa un coneixement bàsic del càlcul diferencial en diverses variables. Això no obstant, dedicarem unes línies a fixar la notació i recordar alguns resultats importants.

Donada una funció $f\colon U \to \mathbf{R}^n$, on $U \subset \mathbf{R}^m$ és obert, denotarem per $\mathrm{D}f(p)$ o per $f'(p)$, la *derivada* (o diferencial) de f en p, si existeix. És una aplicació lineal $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, i està definida per la condició de tangència $f(p+\mathbf{u}) = f(p) + \mathrm{D}f(p)\cdot\mathbf{u} + o(\|\mathbf{u}\|)$. La regla de la cadena permet calcular la derivada d'una composició de funcions diferenciables: $\mathrm{D}(g\circ f)(p) = \mathrm{D}g(f(p))\circ \mathrm{D}f(p)$. La matriu de $\mathrm{D}f(p)$ en les bases canòniques és la *jacobiana*, $\mathrm{J}f(p)$, els elements de la qual són les *derivades parcials* $\mathrm{D}_i f^j(p) \equiv \partial f^j/\partial x^i$. Si totes les derivades parcials existeixen i són contínues la funció es diu de classe C^1, i és diferenciable. Més generalment, una funció es diu *de classe* C^k si existeixen i són contínues totes les derivades parcials k-èsimes; l'ordre en què es calculen és, en aquest cas, irrellevant. La *derivada direccional* de f en p segons el vector $\mathbf{u}$ està definida per $f'(p,\mathbf{u}) \equiv \mathrm{D}_{p,\mathbf{u}} f := \lim_{t\to 0}(f(p+t\mathbf{u}) - f(p))/t$. Si f és diferenciable aquest límit existeix i és $\mathrm{D}f(p)\cdot\mathbf{u}$.

Fórmula de Taylor d'ordre 1 *Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$ un obert convex, $f\colon U \to \mathbf{R}$ de classe C^k, amb $k \geq 1$, i $p \in U$. Llavors $f(x) = f(p) + \mathrm{D}_i f(p)(x^i - p^i) + g_i(x)(x^i - p^i)$, on les funcions g_i són de classe C^{k-1} i satisfan $g_i(p) = 0$.*

Un *difeomorfisme* de classe C^k ($k \geq 1$) és una bijecció $f\colon U \to V$ entre dos oberts de $\mathbf{R}^m$ tal que f i la inversa f^{-1} són de classe C^k.

Teorema de la funció inversa *Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$ obert, $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ de classe C^k, amb $k \geq 1$, i $p \in U$ un punt tal que $\mathrm{D}f(p)$ és un isomorfisme lineal (és a dir, $\det \mathrm{D}f(p) \neq 0$).*

Llavors f és un difeomorfisme local en p. Més precisament, existeix un veïnat obert $U_\circ \subset U$ de p tal que $V_\circ = f(U_\circ)$ també és obert i l'aplicació restringida $f_\circ\colon U_\circ \to V_\circ$ és un difeomorfisme de classe C^k.

A més, si $x \in U_\circ$ i $y = f(x)$, $\mathrm{D}f_\circ^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}$.

Recordem que, encara que $\mathrm{D}f(p)$ sigui invertible en tot punt $p \in U$, aquest teorema només garanteix l'existència d'inverses locals, no d'una inversa global.

Teorema de la funció implícita *Siguin $W \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ obert, $F\colon W \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k, amb $k \geq 1$, i $(a,b) \in W$ un punt tal que $F(a,b) = 0$. Se suposa que la diferencial de F respecte a les segones variables, $\mathrm{D}_2 F(x,y)$, és invertible en el punt (a,b).*

Llavors existeixen veïnats oberts A de a i B de b, amb $A \times B \subset W$, i una única aplicació $f\colon A \to B$, de classe C^k, tals que, si $(x,y) \in A \times B$, la relació $F(x,y) = 0$ equival a $y = f(x)$.

A més, $\mathrm{D}f(x) = -\left(\mathrm{D}_2 F(x,f(x))\right)^{-1} \circ \mathrm{D}_1 F(x,f(x))$.

Teorema del rang *Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$ obert, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k, amb $k \geq 1$, i $p \in A$ un punt tal que $\mathrm{D}f(x)$ té rang constant r en un veïnat de p.*

Llavors existeixen veïnats oberts U de p i V de $f(p)$, i difeomorfismes de classe C^k $\phi\colon U \to U'$, $\psi\colon V \to V'$ tals que, sobre U, $f = \psi^{-1}\circ f_\circ \circ \phi$, on $f_\circ(x^1,\ldots x^m) = (x^1,\ldots x^r,0,\ldots,0)$.

Un cas particular important és el d'una aplicació C^1 tal que $\mathrm{D}f(p)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ és una aplicació lineal injectiva ($m \leq n$ i rang m) o suprajectiva ($m \geq n$ i rang n). Es diu respectivament que f és una *immersió* o una *submersió* en p. En aquests casos el rang és constant en un veïnat de p, i doncs s'hi pot aplicar el teorema del rang, tot i que es poden obtenir resultats més precisos, els lemes de redreçament:

Lema de redreçament del domini *Siguin* $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *oberts,* $f: U \to V$ *una aplicació de classe* C^k $(k \geq 1)$, $x_\circ \in U$. *Suposem que* $\mathrm{D}f(x_\circ): \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *és suprajectiva.*
Existeix un veïnat obert $U_\circ \subset U$ *de* $x_\circ$ *i un difeomorfisme de classe* C^k $h_\circ: U_\circ \to \tilde{U}_\circ$ *tals que, denotant per* $f_\circ: U_\circ \to V$ *la restricció de* f*, l'aplicació* $\tilde{f} = f_\circ \circ h_\circ^{-1}$ *s'expressa* $\tilde{f}(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n)$.

$$\begin{tikzcd} U_\circ \arrow[r, "f_\circ"] \arrow[d, "h_\circ"'] & V \\ \tilde{U}_\circ \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}(V_\circ) \arrow[r, "f_\circ"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & V_\circ \arrow[d, "k_\circ"] \\ & \tilde{V}_\circ \end{tikzcd}$$

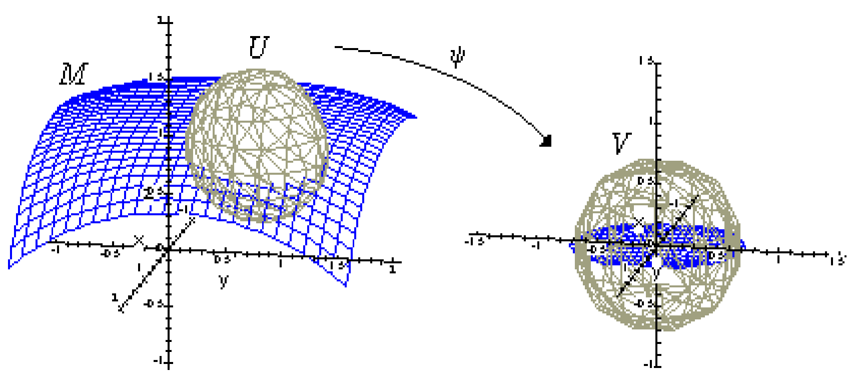
Lema de redreçament de la imatge *Siguin* $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *oberts,* $f: U \to V$ *una aplicació de classe* C^k $(k \geq 1)$, $x_\circ \in U$, $y_\circ = f(x_\circ)$. *Suposem que* $\mathrm{D}f(x_\circ): \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *és injectiva.*
Existeix un veïnat obert $V_\circ \subset V$ *de* $y_\circ$ *i un difeomorfisme de classe* C^k $k_\circ: V_\circ \to \tilde{V}_\circ$ *tals que, denotant per* $f_\circ: f^{-1}(V_\circ) \to V_\circ$ *la restricció de* f*, l'aplicació* $\tilde{f} = k_\circ \circ f_\circ$ *s'expressa* $\tilde{f}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$.

1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

Una *subvarietat* (o subvarietat regular) m-dimensional de classe C^k $(k \geq 1)$ de $\mathbf{R}^n$ és un subconjunt $M \subset \mathbf{R}^n$ que satisfà la propietat següent:

> Per a tot $x \in M$, existeixen un obert U de $\mathbf{R}^n$ contenint x, i un difeomorfisme de classe C^k $\psi: U \to V$, tals que $\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$.

És a dir, al voltant de cada punt, la subvarietat, amb un canvi de coordenades apropiat, es transforma en un obert d'un subespai vectorial m-dimensional (el conjunt $T = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$, considerat com a obert de $\mathbf{R}^m$).



En les noves coordenades $y = (y^j)$ la subvarietat es descriu localment

- implícitament: $y^{m+1} = \ldots y^n = 0$ (dins V)
- paramètricament: la imatge de $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (y^1, \ldots, y^m) & \mapsto & (y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0) \end{array} \right]$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^i)$ la subvarietat es descriu localment

- implícitament: $\psi^{m+1}(x) = \ldots = \psi^n(x) = 0$ (dins U)

- paramètricament: la imatge de $\begin{bmatrix} T & \xrightarrow{g} & \mathbf{R}^n \\ (y^1, \ldots, y^m) & \mapsto & \psi^{-1}(y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0) \end{bmatrix}$

Cal remarcar que, en aquesta descripció implícita, el conjunt de funcions $\psi^{m+1}, \ldots, \psi^n$ té en cada punt rang màxim, $n - m$, i en la descripció paramètrica la parametrització g té en cada punt rang màxim m. Tot seguit veurem que, recíprocament, aquestes condicions permeten construir subvarietats.

És habitual anomenar *corba* una subvarietat de dimensió 1, i *superfície* una subvarietat de dimensió 2. Una *hipersuperfície* és una subvarietat de dimensió $n - 1$ dins $\mathbf{R}^n$.

S'obtenen exemples senzills de subvarietats considerant grafs de funcions:

Proposició 1 *Sigui $V \subset \mathbf{R}^m$ obert, $f: V \to \mathbf{R}^p$ una funció de classe C^k, $k \geq 1$. El graf de f,*

$$M = \mathrm{graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in V, y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p = \mathbf{R}^{m+p},$$

és una subvarietat de dimensió m i de classe C^k.

2 Definicions implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$

Sovint, un "conjunt de nivell" d'una funció és una subvarietat:

Proposició 2 *Siguin $W \subset \mathbf{R}^n$ obert, $F: W \to \mathbf{R}^p$ una funció de classe C^k, $k \geq 1$, amb $p \leq n$, i sigui*

$$M = F^{-1}(0) = \{x \in W \mid F(x) = 0\},$$

suposant que $M \neq \emptyset$. Se suposa que F és una submersió en tot $x \in M$; és a dir, la derivada $\mathrm{D}F(x): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ és suprajectiva (o sigui, $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(x) = p$, rang màxim).

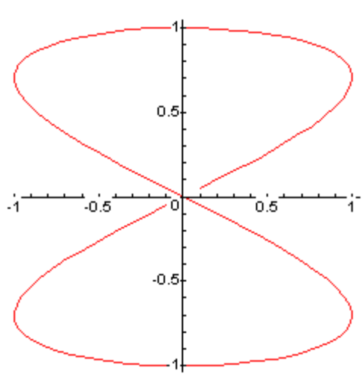
Llavors M és una subvarietat de dimensió $n - p$ i de classe C^k.

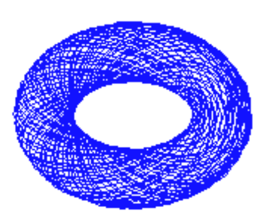
Pel que fa als conjunts parametritzats, tenim el resultat següent:

Proposició 3 *Sigui $g: U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k en un obert $U \subset \mathbf{R}^m$, amb $m \leq n$, i sigui $u_\circ \in U$. Se suposa que g és una immersió en $u_\circ$; és a dir, la derivada $\mathrm{D}g(u_\circ): \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ és injectiva (és a dir, té rang màxim, m).*

Llavors existeix un obert $U' \subset U$ contenint $u_\circ$ tal que $g(U') \subset \mathbf{R}^n$ és una subvarietat m-dimensional de classe C^k.

Observem que aquesta proposició només dóna un resultat local, al voltant d'un punt $u_\circ$. En general, tot el conjunt $g(U)$ no és una subvarietat de $\mathbf{R}^n$, encara que g sigui C^∞, injectiva i amb $\operatorname{rang} \mathrm{D}g$ màxim en tot punt. És fàcil donar-ne exemples fins i tot amb $m = 1$: la imatge d'una corba parametritzada pot no ser una corba regular. (Exemples típics: la corba densa en un tor, i la corba en forma de 8.)





La situació millora si tenim una condició topològica addicional:

Proposició 4 *Sigui $g: U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicació injectiva de classe C^k en un obert $U \subset \mathbf{R}^m$, amb $m \leq n$, i tal que g és una immersió en tot punt.*

Suposem que g és un homeomorfisme de U amb la seva imatge $g(U) \subset \mathbf{R}^n$. Llavors $g(U) \subset \mathbf{R}^n$ és una subvarietat m-dimensional de classe C^k.

Una subvarietat descrita explícitament com el graf d'una funció, $M = \{(x, y) \mid x \in V, y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$, també es pot descriure:

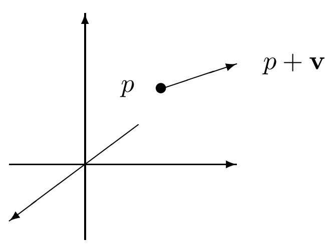
- implícitament: amb l'equació $F(x, y) = y - f(x) = 0$
- paramètricament: amb la parametrització $g(x) = (x, f(x))$

3 Vectors tangents

Anomenem *vector tangent* un parell $(p, \mathbf{v})$, on $p \in \mathbf{R}^n$ és un punt i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ és un vector.

L'escriurem també $\mathbf{v}_p$, i direm també que $\mathbf{v}$ és un vector tangent en p.

És habitual representar-lo amb una fletxa d'origen p i extrem $p + \mathbf{v}$.



El conjunt de vectors tangents en el punt p, $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, s'anomena *espai tangent* a $\mathbf{R}^n$ en p. Amb la suma $(p, \mathbf{v}) + (p, \mathbf{v}') = (p, \mathbf{v} + \mathbf{v}')$ i el producte per escalars $\lambda(p, \mathbf{v}) = (p, \lambda\mathbf{v})$, és un espai vectorial isomorf a $\mathbf{R}^n$. També podem transportar-hi el producte escalar estàndard.

Evidentment, totes les operacions que es fan amb espais vectorials qualssevol es poden fer amb l'espai tangent. En particular, s'anomena *espai cotangent* el dual del tangent, $\mathrm{T}_p^*(\mathbf{R}^n)$.

Un *camí* és una aplicació contínua $c: I \to \mathbf{R}^n$, on $I \subset \mathbf{R}$ és un interval.

Si c és diferenciable en $t_\circ \in I$, la derivada

$$\mathrm{D}c(t_\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t_\circ + h) - c(t_\circ)}{h} \in \mathbf{R}^n$$

s'interpreta com un vector tangent en el punt $c(t_\circ)$. S'anomena *vector tangent* o *velocitat* de c en $t_\circ$, i el representarem per

$$\dot{c}(t_\circ) = (c(t_\circ), \mathrm{D}c(t_\circ)).$$

Siguin γ, δ dos camins diferenciables definits en un veïnat de 0. Diem que són *equivalents* si tenen mateix vector tangent a $t = 0$.

Lema 5 *Aquesta relació és una relació d'equivalència, i hi ha una bijecció entre el conjunt de classes d'equivalència de camins que passen per p a $t = 0$ i l'espai tangent $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$.*

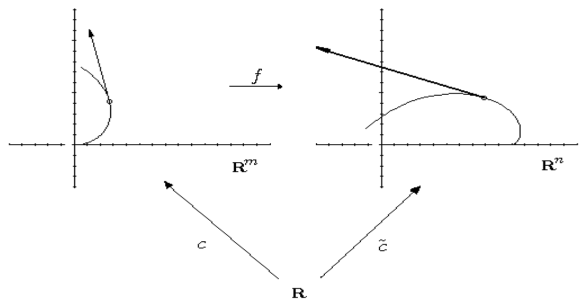
Lema 6 *Sigui* $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *diferenciable, i* c *un camí diferenciable en* $\mathbf{R}^m$*. Llavors* $\tilde{c}(t) = f(c(t))$ *és un camí diferenciable en* $\mathbf{R}^n$*, i, si* $c(t_\circ) = p_\circ$*,* $\mathrm{D}\tilde{c}(t_\circ) = \mathrm{D}f(p_\circ) \cdot \mathrm{D}c(t_\circ)$*.*

Per tant la derivada de f en p, $\mathrm{D}f(p)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, és l'aplicació lineal que transforma els vectors tangents dels camins que passen per p. Des d'un punt de vista més geomètric, hem definit una aplicació lineal

$$\mathrm{T}_p(f)\colon \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^m) \to \mathrm{T}_{f(p)}(\mathbf{R}^n) \qquad (p, \mathbf{v}) \mapsto (f(p), \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{v}).$$

S'anomena *aplicació tangent* de f en p.

Ovservem que f és un difeomorfisme local en p sii $\mathrm{T}_p(f)$ és un isomorfisme lineal.



4 Diferencial d'una funció en un punt

Si $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ és una funció diferenciable en un punt p, la seva derivada en p és una forma lineal $\mathrm{D}f(p)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és a dir, un element del dual de $\mathbf{R}^n$. Defineix, per tant, un covector $\mathrm{d}f(p) \in \mathrm{T}_p^*(\mathbf{R}^n)$, definit per

$$\mathrm{d}f(p) = (p, \mathrm{D}f(p));$$

s'anomena *diferencial* de f en p.

Per definició, doncs, tenim $\langle \mathrm{d}f(p), \mathbf{v}_p \rangle = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{v}$. Aquest nombre coincideix, al seu torn, amb la derivada direccional $\mathrm{D}_{p,\mathbf{v}} f$.

Recordem que $\mathbf{R}^n$ està canònicament dotat d'un producte escalar. Amb ell, s'identifica $\mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}^n)^*$, i anàlogament $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{T}_p^*(\mathbf{R}^n)$. Per tant, existeix un vector tangent $\operatorname{grad} f(p) \in \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, anomenat *gradient* de f en p, tal que, per a tot $\mathbf{v}_p \in \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$,

$$(\operatorname{grad} f(p) | \mathbf{v}_p) = \langle \mathrm{d}f(p), \mathbf{v}_p \rangle,$$

on el primer membre és el producte escalar de vectors de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$.

5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat m-dimensional de classe C^1, $p \in M$.

Anomenem *vectors tangents a* M *en* p els vectors tangents $(p, \mathbf{u})$ dels camins *continguts* en M (i que passen per p).

Anomenem *espai tangent a* M *en* p el conjunt dels vectors tangents a M en p:

$$\mathrm{T}_p(M) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \text{existeix } \gamma\colon I \to M \subset \mathbf{R}^n \text{ tal que } \dot{\gamma}(0) = (p, \mathbf{u})\}.$$

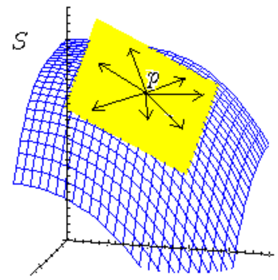
És un subconjunt de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$.

Proposició 7 *L'espai tangent a* M *en* p *és un espai vectorial de dimensió* m*.*

Fixat $p \in M$, el conjunt de punts de la forma

$$\{x = p + \mathbf{u} \mid (p, \mathbf{u}) \text{ és tangent a } M\}$$

és una varietat lineal dins $\mathbf{R}^n$, anomenada *varietat lineal tangent* a M en p. En el cas d'una corba o una superfície s'anomena recta o pla tangent.



Donada una subvarietat $M \subset \mathbf{R}^n$, s'anomena *fibrat tangent* de M la unió (disjunta) dels espais tangents a M en tots els seus punts:

$$\mathrm{T}(M) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p(M).$$

És, doncs, un subconjunt de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. En particular, si $V \subset \mathbf{R}^n$ és un obert, $\mathrm{T}(V) = V \times \mathbf{R}^n$; però cal observar que, en general, *no* es pot identificar $\mathrm{T}(M)$ amb $M \times \mathbf{R}^m$.

6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

Subvarietat descrita implícitament

Proposició 8 *Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat de dimensió m i de classe C^1, $p \in M$.*
Suposem que $M = F^{-1}(0)$, on $F \colon W \to \mathbf{R}^{n-m}$ és C^1 en un obert $W \subset \mathbf{R}^n$, i $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(p) = n - m$.
Llavors $\mathrm{T}_p(M) = \operatorname{Ker} \mathrm{T}_p(F) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \mathrm{T}_p(F) \cdot \mathbf{u}_p = 0\}$.

Subvarietat descrita paramètricament

Proposició 9 *Sigui $g \colon U \to \mathbf{R}^n$ ($U \subset \mathbf{R}^m$ obert, $m < n$) una parametrització injectiva de classe C^1 d'una subvarietat $M = g(U)$. Sigui $u_\circ \in U$ tal que $\mathrm{D}g(u_\circ)$ té rang màxim, m, i sigui $p = g(u_\circ)$.*
Llavors l'espai tangent $\mathrm{T}_p(M)$ té com a base els vectors tangents $(p, \mathrm{D}_1 g(u_\circ))$, …, $(p, \mathrm{D}_m g(u_\circ))$.

7 Camps vectorials

Sigui $V \subset \mathbf{R}^n$ un obert. Un *camp vectorial* en V assigna a cada punt $p \in V$ un vector tangent $(p, \mathbf{f}(p))$ en p. Per tant, és una aplicació de la forma

$$X \colon V \to \mathrm{T}(V) = V \times \mathbf{R}^n \qquad p \mapsto (p, \mathbf{f}(p))$$

És clar que el camp vectorial queda definit per l'aplicació

$$\mathbf{f} \colon V \to \mathbf{R}^n \qquad p \mapsto \mathbf{f}(p)$$

i per això sovint es diu que $\mathbf{f}$ és el camp vectorial. Observem que X és de classe C^k sii ho és $\mathbf{f}$.

El camp vectorial X es diu *tangent* a la subvarietat M si en cada punt $p \in M$ el vector $X(p)$ és tangent a M.

Un camp vectorial en V defineix una equació diferencial de primer ordre:

$$\dot{\gamma} = X \circ \gamma,$$

que també s'escriu, amb les notacions anteriors, $\mathrm{D}\gamma(t) = \mathbf{f}(\gamma(t))$. Una solució, o *corba integral*, de la mateixa és un camí diferenciable $\gamma \colon I \to V$ tal que en tot punt se satisfà l'equació.

Recordem que si X és de classe C^1 i fixem una condició inicial $\gamma(t_\circ) = p_\circ$, podem assegurar l'existència i unicitat d'una solució maximal (en el sentit que el seu domini de definició, que és un interval obert $I \subseteq \mathbf{R}$, no es pot ampliar). Un resultat semblant també val quan X depèn del temps.

8 Formes diferencials

Igual com hem definit el fibrat tangent com la unió disjunta dels espais tangents, podem definir el fibrat cotangent com la unió disjunta dels espais cotangents: $\mathrm{T}^*(M) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}^*_p(M)$.

I de manera anàloga al concepte de camp vectorial, es defineix una *forma diferencial* en un obert $V \subset \mathbf{R}^n$ com una aplicació

$$\theta \colon V \to \mathrm{T}^*(V) = V \times (\mathbf{R}^n)^* \qquad p \mapsto (p, \alpha(p))$$

que assigna a cada punt $p \in V$ un vector cotangent $(p, \alpha(p)) \in \mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n)$.

Donada una funció diferenciable $h \colon V \to \mathbf{R}$, es defineix una forma diferencial $\mathrm{d}h$ en V a partir de la diferencial de h en cada punt:

$$\mathrm{d}h \colon p \mapsto \mathrm{d}h(p).$$

Si h és de classe C^k llavors $\mathrm{d}h$ és de classe C^{k-1}.

Exercicis i problemes

0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial

• **0.1** Proveu que si $f: U \to V$ és una immersió o submersió en un punt $x_\circ$, llavors ho és en un veïnat obert de $x_\circ$.

• **0.2** Proveu el lema de redreçament del domini.
Indicacions

Justifiqueu que, reordenant les variables de $\mathbf{R}^m$, i escrivint $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$, $x = (x_1, x_2)$, podem suposar que $\mathrm{J}f(x) = (\,\mathrm{J}_1 f(x)\ \mathrm{J}_2 f(x)\,)$, on $\mathrm{J}_1 f(x)$ és la jacobiana respecte a les primeres variables, i és invertible en $x_\circ$.

Definim $h: U \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$ per $h(x_1, x_2) = (f(x_1, x_2), x_2)$. Aplicant el teorema de la funció inversa, proveu que h defineix un difeomorfisme $h_\circ: U_\circ \to \tilde{U}_\circ$ entre un veïnat obert de $x_\circ$ i la seva imatge.

Utilitzant que $f = \mathrm{pr}_1 \circ h$, vegeu que $\tilde{f}$ té l'expressió donada.

• **0.3** Proveu el lema de redreçament de la imatge.
Indicacions

Justifiqueu que, reordenant les variables de $\mathbf{R}^n$, i escrivint $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$, $y = (y_1, y_2)$, $f = (f_1, f_2)$, podem suposar que $\mathrm{J}f(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}f_1(x) \\ \mathrm{J}f_2(x) \end{pmatrix}$, on $\mathrm{J}f_1(x)$ és invertible en $x_\circ$.

Definim $h: U \times \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$ per $h(x, t) = (f_1(x), f_2(x) + t)$. Aplicant el teorema de la funció inversa, proveu que h defineix un difeomorfisme $h_\circ: \tilde{V}_\circ \to V_\circ$ entre un veïnat obert de $(x_\circ, 0)$ i la seva imatge. Sigui $k_\circ$ el difeomorfisme invers.

Utilitzant que $h_\circ(x, 0) = (f_1(x), f_2(x))$, vegeu que $\tilde{f}$ té l'expressió donada.

• **0.4** Cerqueu en algun llibre la demostració del teorema del rang.

1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

• **1.1** Proveu que qualsevol recta de $\mathbf{R}^n$ és una subvarietat. Proveu més generalment que qualsevol varietat lineal de $\mathbf{R}^n$ és una subvarietat.

• **1.2** Comproveu que els subconjunts discrets i els subconjunts oberts són precisament les subvarietats de $\mathbf{R}^n$ de dimensió 0 i n.

• **1.3** Siguin $L = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\} \subset \mathbf{R}$, i $M = \{(x, y) \mid xy = 0, (x, y) \neq (0, 0)\} \subset \mathbf{R}^2$. Justifiqueu que són subvarietats, però que les seves adherències no ho són.

• **1.4** Proveu, a partir de la definició, que $\mathbf{S}_1$ és una corba dins $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{S}_2$ és una superfície dins $\mathbf{R}^3$, ambdues de classe C^∞.

• **1.5** Demostreu la proposició 1.
(Generalitzeu la idea del problema anterior.)

• **1.6** Doneu un exemple d'una funció $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *no* diferenciable tal que el seu graf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ sigui una corba de classe C^∞.

• **1.7** Doneu un exemple que mostri que la intersecció de dues superfícies de $\mathbf{R}^3$ pot no ser una corba (regular).

• **1.8** Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ un subconjunt qualsevol. Representem per $M_i \subset M$ el conjunt de punts on M és localment una subvarietat de dimensió i. Proveu que els M_i són oberts de M i que es pot escriure $M = M_0 \cup \ldots \cup M_n \cup M_*$, on la unió és disjunta. Què passa si M és connexa?

2 Definició implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$

• **2.1** Demostreu la proposició 2.
(Utilitzeu el lema de redreçament del domini.)

• **2.2** Proveu que l'esfera $\mathbf{S}_{n-1}$ és una hipersuperfície de $\mathbf{R}^n$.

• **2.3** Sigui $F \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

(a) Si l'equació $F(x) = 0$ defineix una subvarietat, què podem dir de l'equació $F(x) = 1$?
(b) Què podem afirmar si en alguns punts de $M = F^{-1}(0)$ la derivada de F no és suprajectiva?

Il·lustreu les vostres respostes amb exemples $F \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

• **2.4** Estudieu si són superfícies els subconjunts de $\mathbf{R}^3$ definits per les relacions indicades:

(a) Con: $x^2 + y^2 = z^2$.
(b) Hiperboloides: $x^2 + y^2 - z^2 = \pm 1$.
(c) Paraboloides: $x^2 \pm y^2 = z$.

• **2.5** Estudieu si el sistema d'equacions $x^2+y^2-z^2 = 0$, $x \sin z - y \cos z = 0$ defineix una corba dins $\mathbf{R}^3$.

• **2.6** Considerem l'espai vectorial $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ de les matrius 2×2 amb coeficients reals. Proveu que el grup especial lineal $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, format per les matrius de determinant 1, n'és una subvarietat.

• **2.7** Demostreu la proposició 3.
(Utilitzeu el lema de redreçament de la imatge.)

3 Vectors tangents

• **3.1** Proveu el lema 5.

• **3.2** Proveu el lema 6.

• **3.3** Sigui $c \colon I \to \mathbf{R}^2$ un camí tal que $c(0) = (0,0)$, $\mathrm{D}c(0) = (1,1)$. Sigui $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida per $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$. Quin és el vector tangent del camí $f \circ c$ a $t = 0$?

• **3.4** Sigui $R(t)$ una matriu ortogonal (o sigui, $R^\top R = I$), funció diferenciable de t, i tal que $R(0) = I$.

(a) Proveu que el seu vector tangent $A = R'(0)$ és una matriu antisimètrica.
(b) Comproveu-ho en el cas de $R(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Diferencial d'una funció

• **4.1** Donats un camí $\gamma \colon I \to \mathbf{R}^n$ i una funció $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenciables, tals que $\gamma(0) = p$, proveu que $\mathrm{D}(f \circ \gamma)(0) = \langle \mathrm{d}f(p), \dot\gamma(0) \rangle$.

• **4.2** Proveu que, en coordenades cartesianes i les bases canòniques, els components del gradient són els de la diferencial.

• **4.3** Sigui $f\colon V \to \mathbf{R}$ diferenciable en p, on V és un obert de l'espai euclidià $\mathbf{R}^n$. Proveu que el vector unitari $\mathbf{u}_p$ que fa màxima la derivada direccional $f'(p;\mathbf{u})$ és el normalitzat de $\operatorname{grad} f(p)$.

5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

• **5.1** Proveu la proposició 7.
(Preneu la definició de subvarietat, observant que si ψ és un difeomorfisme llavors la seva aplicació tangent és un isomorfisme, la qual cosa permet identificar vectors tangents a M amb vectors tangents a $\mathbf{R}^m \times \{0\}$.)

• **5.2** Sigui $a > 0$ una constant, i $C \subset \mathbf{R}^2$ la "corba" definida per $x^3+y^3 = 3axy$. Sigui $\gamma\colon \mathbf{R}-\{-1\} \to \mathbf{R}^2$ la corba parametritzada definida per $\gamma(t) = \left(\dfrac{3at}{1+t^3}, \dfrac{3at^2}{1+t^3}\right)$.

(a) Proveu que γ és injectiva amb imatge C.
(b) Proveu que γ és una immersió injectiva C^∞.
(c) Estudieu si C és una corba (regular) a partir de l'equació que la defineix.
(d) Sigui $\delta(t) = \left(\frac{3at^2}{1+t^3}, \frac{3at}{1+t^3}\right)$. Proveu que també està continguda en C, compareu els vectors tangents $\dot\gamma(0)$ i $\dot\delta(0)$, i conclogueu que C no és una corba regular en $(0,0)$. Dibuixeu C aproximadament.
(e) Mitjançant la bijecció γ, es pot traslladar la topologia de $\mathbf{R}-\{-1\}$ al conjunt C. Proveu que aquesta topologia és estrictament més fina que la topologia induïda per la de $\mathbf{R}^2$.

• **5.3** Estudieu si el conjunt de les matrius 2×2 de traça b i determinant c és una subvarietat de l'espai de les matrius $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

• **5.4** Si $M \subset \mathbf{R}^n$ és una subvarietat de dimensió m, proveu que $\mathrm{T}(M) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ és una subvarietat de dimensió $2m$.

• **5.5** Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ oberts, $f\colon U \to V$ una aplicació tal que existeixen totes les derivades direccionals $f'(p;\mathbf{u})$. Això permet definir l'aplicació tangent $\mathrm{T}(f)\colon \mathrm{T}(U) \to \mathrm{T}(V)$ per $(p;\mathbf{u}) \mapsto (f(p); f'(p;\mathbf{u}))$. Proveu que f és C^1 sii $\mathrm{T}(f)$ és C^0.

• **5.6** Siguin $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ aplicacions diferenciables entre oberts d'espais euclidians. Proveu que $\mathrm{T}(g\circ f) = \mathrm{T}(g)\circ\mathrm{T}(f)$.

6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

• **6.1** Proveu la proposició 8.
(Primerament, observeu que basta comprovar que $\mathrm{T}_p(M) \subset \operatorname{Ker} \mathrm{T}_p(F)$. Per a comprovar aquesta inclusió, si $\mathbf{u}_p$ és tangent a M considereu un camí γ en M que el representi, i considereu $F\circ\gamma$.)

• **6.2** Sota les mateixes hipòtesis de la proposició 8, siguin F^j les funcions components de F. Comproveu que $\mathrm{T}_p(M)$ és el subespai de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$ anul·lat pels covectors $\mathrm{d}F^1(p), \ldots, \mathrm{d}F^{n-m}(p)$.
Comproveu igualment que $\mathrm{T}_p(M)$ és el subespai de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$ ortogonal al subespai generat pels vectors $\operatorname{grad} F^1(p), \ldots, \operatorname{grad} F^{n-m}(p)$.

• **6.3** Sigui la superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ definida per $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-18 = 0$. Proveu que és efectivament una superfície i calculeu-ne el pla tangent i la recta normal en el punt $P = (3,5,-4)$.

• **6.4** Proveu que l'espai tangent a l'esfera $\mathbf{S}_n$ en un punt $\mathbf{x}$ es pot identificar al subespai ortogonal al vector $\mathbf{x}$.

• **6.5** Sigui C el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z) = & x+y+z-3 & = 0 \\ G(x,y,z) = & x^2-y^2+2z^2-2 & = 0 \end{cases}$$

(a) Proveu que C és una corba de classe C^∞.
(b) Calculeu-ne la l'espai tangent en $p = (1,1,1)$.
(c) Escriviu les equacions de la recta tangent i el pla normal a C en el punt esmentat.

• **6.6** Sigui S el graf d'una funció $f\colon U \to \mathbf{R}$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) de classe C^1. Comproveu que el pla tangent al graf de f en $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ és el graf de l'aproximació lineal de f en $(x_\circ, y_\circ)$.

Calculeu també l'equació de la recta normal en el mateix punt.

• **6.7** Considereu la superfície de $\mathbf{R}^3$ definida per $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Calculeu-ne el pla tangent corresponent a $(x_\circ, y_\circ) = (1,2)$.

• **6.8** Proveu la proposició 9.

• **6.9** Sigui $\gamma\colon]0,+\infty[\to \mathbf{R}^2$ definida per $\gamma(t) = (t\cos 2\pi t, t \sin 2\pi t)$. La imatge $C = \gamma(]0,+\infty[) \subset \mathbf{R}^2$ és una espiral.

(a) Proveu que γ és una immersió injectiva C^∞.
(b) Proveu que C és una corba (regular).
(c) Calculeu l'espai tangent a C en el punt $(1,0)$.

• **6.10** Considereu el cas d'una superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ parametritzada per $g\colon U \to \mathbf{R}^3$, i siguin $T_1 = \mathrm{D}_1 g(u_\circ)$, $T_2 = \mathrm{D}_2 g(u_\circ)$, $p = g(u_\circ)$. Proveu que la condició de rang màxim equival a $T_1 \times T_2 \neq 0$, i en aquest cas utilitzeu aquest vector per a expressar $\mathrm{T}_p(S)$ i el seu subespai ortogonal.

• **6.11** Considereu la parametrització de l'esfera centrada a l'origen de radi R, definida per

$$g\colon (\phi,\theta) \mapsto (R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\theta).$$

(a) Estudieu si g és una immersió injectiva, parant especial atenció al domini de g.
(b) Calculeu els corresponents vectors tangents T_ϕ, T_θ, així com $T_\phi \times T_\theta$ (notacions del problema anterior), i representeu-los gràficament.

7 Camps vectorials

• **7.1** Estudieu si els camps vectorials de $\mathbf{R}^3$ definits per

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z) \qquad \mathbf{g}(x,y,z) = (-y,x,0) \qquad \mathbf{h}(x,y,z) = (y,x,z)$$

són tangents en algun punt a l'esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ i al con $x^2+y^2 = z^2$, $z > 0$.

• **7.2** Sigui el camp vectorial de $\mathbf{R}^3$ definit per $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y,x,0)$. Trobeu-ne la corba integral γ amb condició inicial $\gamma(0) = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$.

8 Formes diferencials

• **8.1** Sigui X un camp vectorial en V, γ una corba integral de X, i $h\colon V \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable. Proveu que $\mathrm{D}(h \circ \gamma) = \langle \mathrm{d}h, X \rangle \circ \gamma$.

• **8.2** Justifiqueu l'expressió següent:

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial x^i}\, \mathrm{d}x^i.$$

Indicacions i respostes

0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial

1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

1.4 Considereu, per exemple, la funció $\psi(x,y) = (x, y - \sqrt{1-x^2})$, i proveu que és un difeomorfisme entre dos oberts del pla.

2 Definició implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$

2.2 Considereu $F(x) = (x^1)^2 + \ldots (x^n)^2 - 1$, i vegeu que és una submersió en tot $x \neq 0$.

2.4 Ho són tots, excepte el con en el seu vèrtex.

2.5 És una corba, excepte en l'origen.

2.6 Identificant les matrius amb $\mathbf{R}^4$ per $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \leftrightarrow (x,y,z,t)$, estudieu si la funció $f(x,y,z,t) = xt - yz$ és una submersió.

3 Vectors tangents

3.3 $((1,1),(2,0))$.

3.4

Deriveu $R^\top(t)\,R(t) = I$

4 Diferencial d'una funció

4.3 $\mathrm{D}_{p,\mathbf{u}} f = \|\operatorname{grad} f(p)\| \cos\alpha$, on α és l'angle format per $\operatorname{grad} f(p)$ i $\mathbf{u}_p$.

5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

5.2 Es comprova immediatament que els punts $\gamma(t)$ satisfan l'equació que defineix C. Recíprocament, donat $(x,y) \in C$, posant $t = y/x$ (si $x \neq 0$), $t = 0$ (si $x = 0$), $\gamma(t)$ és (x,y). Així $\gamma\colon \mathbf{R} - \{-1\} \to C$ és bijectiva.

$\mathrm{D}\gamma(t) \neq (0,0)$ sempre, per tant és una immersió.

Si $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$, la jacobiana de F s'anul·la en $(a,a) \neq C$ i en $(0,0) \in C$. Per tant C és una corba excepte, potser, en $(0,0)$. Els vectors tangents $\dot\gamma(0)$, $\dot\delta(0)$, tenen el mateix punt base $(0,0)$ però són linealment independents, cosa que no passaria si C fos regular en aquest punt. S'hi produeix una mena d'autointersecció aparent.

La bijecció γ és contínua, però no bicontínua; per exemple, $]-\infty,-1[\, \subset \mathbf{R} - \{-1\}$ és tancat, però la seva imatge $\gamma(]-\infty,-1[) \subset C$ té $(0,0)$ com a punt adherent (respecte a la topologia ordinària de $C \subset \mathbf{R}^2$).

5.3 Aquest conjunt és una superfície regular sempre que $b^2 \neq 4c$. Quan $b^2 = 4c$, no és regular en un únic punt, $\begin{pmatrix} b/2 & 0 \\ 0 & b/2 \end{pmatrix}$. Això es pot comprovar, per exemple, seguint un procediment semblant al del problema anterior.

5.6 No és res més que la regla de la cadena en cada punt de U.

6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de R^n

6.3 F és C^∞, i $\mathrm{D}F$ només s'anul·la en $(0,0,0)$, que no és de S.

Pla tangent a S en P: $3x+5y+4z=18$. Recta normal a S en P: $\begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$.

6.5 (F,G) és C^∞, i és una submersió excepte en els punts de la recta $x=-y=2z$, cap dels quals no és de C.

$\mathbf{u}_p \in \mathrm{T}_p(C)$ sii $\mathbf{u} \in \left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$.

Recta tangent: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Pla normal: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

6.6 Equació del pla tangent: $z = z_\circ + \mathrm{D}_1 f(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ) + \mathrm{D}_2 f(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)$, on $z_\circ = f(x_\circ,y_\circ)$.

Equació de la recta normal: $\begin{pmatrix}x_\circ\\y_\circ\\z_\circ\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\partial f/\partial x(x_\circ,y_\circ)\\\partial f/\partial y(x_\circ,y_\circ)\\-1\end{pmatrix} \qquad (\lambda\in\mathbf{R})$.

6.7 $z = 2x+8y-9$.

6.9 $\|\gamma\|$ és injectiva, i doncs γ ho és.

$\mathrm{T}_{(1,0)}C = \langle(1,0;1,2\pi)\rangle$.

6.10 $\mathrm{T}_p(S)$ és el subespai ortogonal al vector $(p, T_1\times T_2)$.

6.11 $T_\phi = R\begin{pmatrix}-\sin\phi\sin\theta\\\cos\phi\sin\theta\\0\end{pmatrix}$, $T_\theta = R\begin{pmatrix}-\cos\phi\cos\theta\\\sin\phi\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$, $T_\phi\times T_\theta = -R^2\sin\theta\begin{pmatrix}\cos\phi\sin\theta\\\sin\phi\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix} = -R\,\sin\theta\, g(\phi,\theta)$.

7 Camps vectorials

7.1 A l'esfera: **f** no hi és tangent enlloc, **g** hi és tangent arreu, i **h** hi és tangent sobre dues circumferències, les obtingudes tallant l'esfera amb els plans $x-y=\pm1$.

Al con: **f** i **g** hi són tangents arreu, i **h** hi és tangent sobre les dues semirectes obtingudes tallant el con amb el pla $x=y$.

7.2 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_\circ\\y_\circ\\z_\circ\end{pmatrix}$.

8 Formes diferencials

8.2 En aquesta expressió $\mathrm{d}x^i$ és la diferencial de la funció coordenada x^i.